Romerske rør: Frontin som matematiker

af Christian Marinus Taisbak & Jørgen Martin Hansen

Sekundærlitteraturen om det berømte manuskript i klosterbiblioteket hos benediktinerne i Monte Cassino, Casinensis 361, og Sextus Iulius Frontinus' *commentarius*, *De Aquae Ductu Urbis Romae,* er vokset voldsomt i de senere årtier. Men en del af teksten er så speciel at den har voldt ikke bare middelalderens skrivere, men også senere udøvere af tekstkritik masser af problemer. Bestræbelserne for at rette op på teksten kan tydeligt ses på *apparatus criticus* i de trykte udgaver.

I de trykte tekstudgaver er der megen usikkerhed om den korrekte læsning og forståelse af tallenes varierende notation – men hvis Frontinus mente bogen skulle være til nytte, skal de angivne tal jo være korrekte. For at vurdere deres korrekthed er den bedste måde selv at udregne dimensionerne, med de metoder som brugtes i Antikken, uden at skæve til de rettelser som traditionel filologisk tekstkritik har frembragt.

Afsnittet, der tales om, er selvfølgelig standarderne for romerske rørstørrelser, §§ 39-63. De adskiller sig fra den første nedskrevne standard for romerske blyvandrør, som er mere end 100 år ældre og stammer fra Vitruv, *De Architectura* VIII,6. Denne standardisering er mere simpel, baseret alene på rørlængde, omkreds og vægt. Vitruvs standard blev fulgt af Plinius, *Naturalis Historia* XXXI,41, Faventinus, *De Diversis Fabricis Architectonicae* 6-7, og Palladius, *De Agricultura* IX, 11. Der er ingen tvivl om at de standarder Frontin angiver, stammer fra den praktiske udøvelse af rørfremstillingen til Roms vandforsyning – eftersom Frontin var chef for denne del af byens infrastruktur. Alligevel blev hans standard ikke overtaget af de senere tekniske forfattere, som holdt fast ved Vitruv.

Frontin udregner, eller snarere beskriver, en udvalgt serie af 25 rørstørrelser, som var officielt anerkendt og skulle følges ved rørfremstillingen. I fire tilfælde nævner han desuden ulovlige, større rør, som *aquarii*, vandmændene, i egen interesse sneg sig til at bruge før de tilsluttede forsyningsrørene til forbrugerne. Røråbningens areal (lysning) blev i praksis anset som ækvivalent med kapaciteten (*capacitas*). Man havde intet præcist udtryk for strømhastigheden, men vidste, at når vand løb hurtigt, ydede ledningen mere, og omvendt.

Vi ved faktisk ikke hvordan Frontin – og hans *calculatores* – udførte deres udregninger; men disse tal løste problemerne med at give forbrugere med samme vandtilladelse præcist samme vandmængde. Rørlysningen var midlet til at sikre ligebehandling. Man benyttede ifølge Frontin (kap.36) et særligt tilslutningsrør af bronze (*calix*), som *procurator aquarum* skulle stemple med den godkendte rørlysning. *Calix* måtte ikke være kortere end 12 tommer (22 cm). Det dannede mellemled mellem vandbeholderen (*castellum*) og forbrugerens blyrørsledning. Og Frontin citerer (kap. 106) en senatsbeslutning fra år 11 f. Kr. hvorefter blyrøret på de første 50 fod (16-17 m) skulle have samme lysning som stemplet i *calix*. Problemet er her, at Frontin er den eneste, der omtaler en sådan *calix,* og der er aldrig fundet arkæologisk bevis for dens eksistens.

Det er heller ikke tydeligt hvordan rørstøberne, *plumbarii*, skulle bruge de angivne rørstandarder. De numeriske angivelser er alt for detaljerede. Kun omkredsen, dvs. bredden af den støbte blyplade, havde interesse. Men samlingen til et rør gennem længdelodning gjorde det umuligt at opnå præcision. Og rørene var alt andet end cirkulære, ofte nærmere pæreformede.

Med hensyn til de konkrete udregninger véd vi imidlertid at metoderne til at bestemme cirkulære genstandes dimensioner hovedsagelig var de samme som vi lærer i skolen nu til dags, dvs. dem som vi kender fra Archimedes' *Om cirklens udmåling*, (κύκλου μέτρησις).

Nøjagtigheden af resultaterne må forstås som en akademisk øvelse. Det bliver klart, når vi ser på de benyttede enheder. Frontin bruger den normale *digitus* (en fingerbredde eller tomme), *uncia* (1/12 af en *digitus*), og en *scripulum* (en minimal størrelse af enhver slags). Så 1 *digitus* = 12 *unciae*. Men hvor mange s*cripula* er en *uncia*? Som oftest siger kilderne at der går 24 *scripula* på en *uncia*, og dermed 288 *scripula* på en *digitus*. I vores transkription er *digiti* betegnet ved ^{d}, *unciae* ', and *scripula* ". Frontinus (eller hans *calculator*) har formentlig brugt en *abacus* (eller flere) med huller til disse tre typer af enheder og deres brøkdele, og deres brøkdele igen.

Siden Archimedes (3.årh. f. Kr.) har forholdet mellem omkreds (periferi) og diameter i en cirkel været almindelig viden i skolen, 22:7 (= 3.142857, som i praksis er en meget god tilnærmelse, den er 1262 ppm for stor, værdien af π med 6 decimaler er 3.141593). Archimedes giver os i tre sætninger de følgende formler, som vi vil bruge i rekonstruktionen af regnestykkerne:

Formel 1 Forholdet mellem periferi og diameter = 22:7,dvs. periferien **P =** 22 **D**/7 (= **3D + D/7**).

Formel 2 Forholdet mellem cirklens areal (dvs. rørlysningen) og kvadratet på diameteren er A : $D^2 \approx 11:14$, hvoraf følger **11 $D^2 \approx$ 14 A** (målt i kvadratdigiti) eller **A ≈ D^2 * 11/14.**

Formel 3 Når det er åbningen A der er givet (som i rør 20 og opefter), følger at 121 $D^2 \approx$ 154 A, hvoraf **11 D = √ (154 A).**

Formel 4 Hvis formel 3 benyttes på formel 1, finder vi at **P = 2√(154 A)/7.**

For at udregne kvadratroden af store tal kan vi bruge en metode, som allerede var kendt i Babylonsk matematik og beskrevet af Heron (i *Metrika* I.8):

$\sqrt{N} \approx q + t/2q$, hvor q^2 er det største kvadrattal mindre end N, og $t = N - q^2$, eller
$\sqrt{N} \approx q - t/2q$, hvor q^2 er det mindste kvadrattal større end N, og $t = q^2 - N$.

I praksis vælger vi q^2 som det kvadrattal der er nærmest N; jo mindre difference t, desto bedre er tilnærmelsen.

> Et eksempel: N = 154, $q^2 = 144 = 12^2$. $t = 154 - 144 = 10$. $\sqrt{N} = \sqrt{154} \approx 12 + 10/24 = 12.4167$, eller i Frontins notation: 12 *digiti* 5 *unciae*. Lommeregneren siger 12.4097 – vi var 7/1000 for store. Bemærk at begge metoder giver en for stor værdi, fordi $(q \pm t/2q)^2 = q^2 \pm t + (t/2q)^2$, hvilket er en anelse større end $N = q^2 \pm t$.

Frontin havde formentlig adskillige nyttige tabeller ved hånden, f.eks. en tabel over kvadrattal, som let kan konstrueres uden belastende multiplikationer. Formelen $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ giver dem fra en ende af: $4^2 = 16$; $5^2 = 16 + 8 + 1 = 25$; $6^2 = 25 + 10 + 1 = 36$; ... $101^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$.

For hvert rør angiver Frontin også kapaciteten (*capacitas*), et udtryk for ydelsen (vandmængde pr. tidsenhed). Enheden for kapaciteten defineres som arealet (dvs. røråbningen) i 5-røret, som per definition har en diameter på 5/4 *digiti*; derved får enheden et areal på **275/224** kvadratdigiti (25/16 * 11/14, se formel 2). Bemærk at 275/224 kun er en anelse (5/1000) større end 11/9, som er en meget mere håndterlig ratio – men som vi ikke har været i stand til at identificere i vore rekonstruerede beregninger. Ønskede *calculator* virkelig et mikrometer-resultat? Formentlig imødekom den simplificerede formel 6 (se nedenfor) ethvert behov for nøjagtighed.

Enheden for 5-rørets kapacitet kaldes en *quinaria* (betegnet ved ^{q}). Den præcise værdi i kvadratdigiti nævnes intetsteds i teksten, men må forstås som underliggende kalkulationer. Vi fornemmer dog et *missing link*.

To kapaciteter forholder sig til hinanden som arealerne af deres rørs åbninger, dvs som kvadraterne på deres diametre (*Euklid, Elementer* XII.2). Derfor er det nemt at udregne kapaciteterne, hvis diametrene er kendt; dette er tilfældet med rør nr. 6 til 15, mens der ved rørene fra nr. 20 bruges en anden (og vanskeligere) metode – som til gengæld giver "nøjagtige" resultater i de fleste tilfælde.

Rørene 5 til 15 benævnes efter antallet N af kvarte diametre; fx er 10-rørets diameter 10/4 *digiti* = 2½ *digiti*. Deres kapaciteter udregnes med

Formel 5 **$C_N = N^2/25$, for N = 6 … 15.** *Fx*:. Kapacitet C_{10} = 100/25 = 4 *quinariae*.

20-røret og de følgende benævnes efter deres areal (åbninger, målt i *kvadrat-digiti*). Deres kapaciteter udregnes fra 5-rørets kapacitet (som er 1 *quinaria*) ved hælp af

Formel 6 **C_N = N * 224/275, for N > 19.**

Fx: . C_{40} = 40 * 224/275

= 8 * 224/55	(forkortet med 5)
= 8 * 220/55 + 8 * 4/55	(55 går op i 220)
= **32 + 32/55**	(#)
= 32 + 384/660	(forlænget med 12)
= 32 + 330/660 + 55/660 – 1/660	
≈ 32 + 1/2 + 1/12	(1/660 ignoreres)
= 32 *digiti* 7 *unciae*	
= 32 ^{q} 7' *quinariae*	

(#) Eftersom arealet af alle rør med et nummer større end 15 kan deles med 5 (fordi det ser ud til at kun den slags rør blev brugt), kan formel 6 reduceres til **C_N = 4N/5 + (4N/5) / 55.**

Der findes en generel metode til at vurdere en brøk: forlæng brøken med 12 (eller en divisor i 12) således at nævneren bliver delelig med 12; del derefter tælleren i et multiplum af den oprindelige nævner plus en rest. Resten kan evalueres som 288-dele eller ignoreres (hvis den er "lille nok").

Et eksempel:

6/17 = 72 / (12*17) = 72 / 204

= 68 / (12*17) + 4 / (12*17)　　　　　　(68 + 4 = 72)
= 4/12 + 1/51 (*digiti*)
= 4 *unciae* + nogle *scripula*, der kan evalueres som følger (ved forlængelse med 288):
   1/51 = 288 / (51*288)
= 255 / (51*288) + 33 / (51*288)
= 5/288 + en rest, som kan ignores eller udregnes til ≈ 1/445 = ½ scr. (ialt (≈ 5½ *scripula*).

Resultat: 6 /17 > 4' 5".

Tal-notation i manuscript C.

Digiti er skrevet enten med romertal (I V X L C) eller med talord (*novem, undecim*); variationen er vanskelig at forklare – ligesom også det træk at et resultat som det var oplagt at præsentere i en tabel, er skrevet udførligt ud i lange monotone sætninger. Frontin må da have kendt til at give sådanne resultater i tabeller – tænk blot på Ptolemæus' mange tabeller i Almagesten.

Unciae har deres helt særlige notation; deres navne finde ikke i manuskriptet:

uncia	**–**	1/12	septunx	**S –**	7/12
sextans	**=**	1/6	Bes	**S =**	2/3
quadrans	**= –**	1/4	dodrans	**S = –**	3/4
triens	**= =**	1/3	dextans	**S = =**	5/6
quincunx	**= = –**	5/12	deunx	**S = = –**	11/12
semis	**S**	1/2	semuncia	**£**	1/24

Disse tegn er ofte meget vanskelige at læse i manus C fordi de svinder ind til små punkter. En halv *uncia* (*semuncia*) ses oftest skrevet med et tegn der ligner „£“. I tre tilfælde optræder andre tegn, men vi skriver dem alle som £ i vores korrigerede tekst.

Scripula (en *scripulum* = 1/24 *uncia* = 1/288 *digitus*) er skrevet med romertal eller med talord, med et specialtegn foran, Э. En oversigt over disse læsemåder gives i et appendix.

I vores transcription anvendes følgende notation:

4^d 8' 12" betyder 4 *digiti* (tommer) 8 *unciae* (tolvtedele) 12 *scripula* (288'indstyvendele).

6^q betyder 6 *quinariae*. (Enheden for 5-rørets kapacitet kaldes en *quinaria*.)

Symbolerne > og < betyder (idiosynkratisk) at den værdi der følger efter symbolet er (henholdsvis) det nærmeste hele tal nedenfor eller ovenfor den nøjagtige værdi. For eksempel

3^d/11 < 3' 7" (nøjagtigt: 3' 6".5454 ...).

Når man bruger Archimedes' værdier og metode til at udregne dimensioner, må man ofte dividere med 7, 11 eller 55, og derfor har der sandsynligvis været tabeller til rådighed til at lette disse udregninger, for eksempel som de følgende:

Syvendedele	Elvtedele	
1/7 > 1' 17"	1/11 > 1' 2"	7/11 > 7' 15"
2/7 > 3' 10"	2/11 > 2' 4"	8/11 > 8' 17"
3/7 > 5' 3"	3/11 < 3' 7"	9/11 < 9' 20"
4/7 > 6' 20"	4/11 < 4' 9"	10/11 < 10' 22"
5/7 < 8' 14"	5/11 < 5' 11"	
6/7 < 10' 7"	6/11 > 6' 13"	1/55 < 5" ¼

I det følgende er de enkelte sætninger fra manus C (Codex Casinensis 361) fotografisk kopierede som overskrifter til hver rør-norm. I den venstre spalte anføres det, vi faktisk kan læse (*lectio*). I den højre angives de dimensioner, vi har beregnet med archimediske metoder, med de nødvendige forklaringer, og resultaterne er brugt som korrektioner i teksten (*emendatio*). Korrektionerne er trykt med **rødt.**
I skemaerne anvendes forkortelserne D (diameter), P (periferi), C (kapacitet).

Under udregningerne jongleres der med omsætning fra større til mindre enheder på denne måde:
1 *digitus* = 12 *unciae* = 288 *scripula*. 1 *uncia* = 24 *scripula* (ofte: ½ *uncia* = 12 *scripula*).
Man sporer operationer på en *abacus* af disse resultater.

§ 39 Quinaria, 5-røret

Fistulaqnaria **diametridigitûunû.** **digitostres.ЭS= = IIII^{or}** **capitqnariauna** D: 1^{d} P: 3^{d}10' 4" C: 1^{q}	fistula quinaria diametri digitum unum**= –** **perimetri** digitos tres S = = **– Э III** capit quinaria**m** una**m** D: 5/4 *digiti* = 1^{d} **3'** P: 3^{d} **11' 3"** C: 1^{q}

Røret kaldes *quinaria* fordi diameteren er 5 (*quinque*) kvarte *digitus*; 1/4 *digitus* bruges som enhed i rørene nr. 5 til 19 (hvoraf de fleste ikke var i brug og derfor ikke medtaget).

5-rørets kapacitet bruges som enhed for kapaciteter (benævnt 1 *quinaria*), og udregnes til $(5/4)^2$ * 11/14 = 275/224 *dig*^{2}. Antal *quinariae* angives (ligesom de andre mål) i *digiti, unciae* og *scripula*, men her i betydningerne 'hele', '12tedele' og '288indstyvendedele' – måske uden særlig god forståelse af enheder og dimensioner.

For at vurdere resultaternes (overdrevne) nøjagtighed er det nyttigt at kende denne lille konkordans:

	digitus	uncia	scripulum	quinardiameter
millimeter	18,40	1,53	0,06	23,00

Manus C361 er svært beskadiget. Ordet *pimetri* (den sædvanlige forkortelse) mangler, tegnet Э (som markerer *scripula*) er fejlplaceret. Ovenover IIII er skrevet *or* (quattu*or*?), måske for at forhindre at det læses som III. Men III er faktisk bedre, jvf udregningerne nedenfor. Periferien er den vigtigste dimension for blystøberen fordi den definerer bredden af blypladen.

D: Fem kvarte *digitus* = 1 *digitus* plus 3 *unciae*. Disse 3 må være faldet ud ved en fejlskrivning.

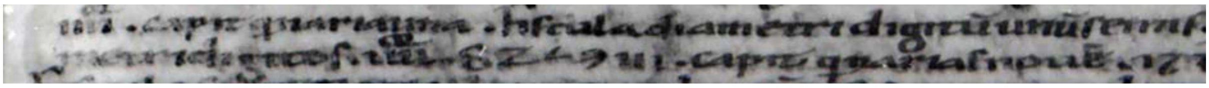
P: 1^{d} 3' * (3 + 1/7) (Archimedes) kan udregnes på følgende måde:

1^{d} 3' * 3 =	3^{d} 9'
1^{d} 3' / 7 = 15' / 7 = 14' 24" / 7 >	2' 3"
ialt	3^{d}11' 3" (3 *digiti*, 11 *unciae*, 3 *scripula*)

11': En streg (-, *uncia*) tabt i margenen?
3" : afrundet nedad fra (3 + 3/7) *scripula* (tab: 1/40 mm).

C: 1 pr. definition.

§ 40 Senaria, 6-røret



fistula **diametridigitûunûsemis.** **ꝑimetridigitos.IIII^{or}.S = £ЭIII.** **capit ꝗnariasnouê. ???Э·** D: 1^d 6' P: 4^d 8'½ 3" (= 4^d 8' 15") C: 9 ???	**fistula senaria** **diametri digitum unum semis** **perimetri digitosIIIIS = £ЭII** **capit quinariam unam = = – ЭVII** D: 1^d 6' P: 4^d 8'½. **2"** C: **1^q 5' 7"**

Rørets navn (*senaria*) mangler.

Diameter 6/4 *digiti* = 1^d 6'

Periferien (P) er lig med diameteren gange 3 + 1/7. In manus C afrundet opad med 1" (0,06 mm) for meget! Bemærk at 8 *unc*. + 15 *scr*. skrives 8½ *unc*. + 3 *scr*., S = £ Э III (således ofte).

1^d 6' * 3 = 3^d 18' =	4^d 6'
1^d 6' / 7 = 18' / 7 = 14' 96" / 7 <	2' 14"
ialt	4^d 8' 14"

Kapaciteten (C) er forholdet 6-røret til 5-røret, dvs: forholdet mellem kvadraterne på diametrene,
$D_6^2 : D_5^{2}$ = 36 : 25. Den kan udregnes på følgende måde, ved division af 36 med 25 (formentlig på en *abacus*); resultatet bliver et tal, tolket som et antal *quinariae* og skrevet på den sædvanlige måde; symbolerne ' og " betegner her ikke *unciae* og *scripula*, men 12'tedele og 288'indstyvendedele af 1 *quinaria* (altså principielt "ubenævnte" tal).

36 / 25 =	1 rest 11	
11 / 25 = 132' / 25 =	5' rest 7'	(11 *dig*. er lig med 132 *unc*.)
7' / 25 = 168" / 25 <	7"	(7 *unc*. er lig med 168 *scr*.)
ialt	1^q 5' 7"	

Ordet 'novem' (9) plus nogle uforståelige tegn er naturligvis absurd, men kan være fejllæst eller fejlskrevet fra *unam*. Fejlen er mærkelig i betragtning af at kapaciteterne i de følgende rør (8, 10, 12, and 15) er fornuftige.

§ 41 Septenaria, 7-røret

fistulaseptenaria diametridigitû.IS= – ꝑimetridigitos sex. capit ꝗnarias ??? D: 1^{d} 9' P: 6^{d} C: unreadable	**fistula septenaria diametri digitum I S = – perimetri digitos V S capit quinariam I S = = – £** D: 1^{d} 9' P: **5**^{d} 6' C: **1**^{q} **11' 12"**

Diameter 7/4 *digiti* = 1^{d} 9'

For en elev af Archimedes er periferien nærmest hovedregning:

7/4 * (3 +1/7) = 21 kvarte + (1/7 af 7 kvarte) = 22 kvarte = 5½, altså 5^{d} 6'.

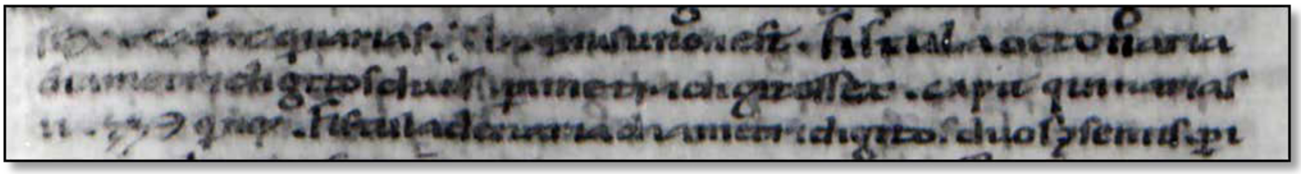
Frontinus (eller hans assistent) runder tilsyneladende op til 6 *digiti*, en fejl på ca 9 mm, for stor til bare at ignoreres (hvis vi skal stole på de øvrige resultater). Men den spiller ingen rolle fordi denne rør-dimension ikke er i brug, *in usu non est*.

En yderligere anomali: Generelt skrives *digiti* med romertal, men her er brugt talordet *sex*.

Da han udregnede kapaciteten, $7^2/5^2$ = 49/25, kan han have ræsonneret således:

49 /25 = 2 med et overskud på 1/25 = 288"/25 = 11"½. Result: C = 2^{q} - 11"½ > 1^{q} 11' 12".
Vi aner ikke hvad der har stået i manus.

§ 42 Octonaria, 8-røret



fistulaoctonaria **diametridigitosduos·** **ꝑimetridigitossex·** **capit qnariasII·S £ Эqnq** D: 2^d P: 6^d C: 2^q 6'½ 5"	**fistula octonaria** **diametri digitos duos** **perimetri digitos sex = – Э X** **capit quinarias II S £ Э quinque** D: 2^d P: 6^d **3'10**" C: 2^q 6'½ 5" (2^q 6'17")

Diameter 8/4 *digiti* = 2^d

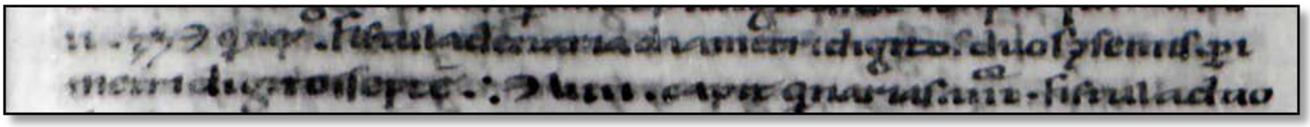
Perimeter	2^d * 3	6^d
	2^d / 7 = 24' / 7 = 21' 72"/ 7 >	3' 10"
	total	6^d 3' 10"

Kapaciteten er udregnet korrekt, og bekræfter derved at metoden var forstået. Fejlen ved de foregående rør, såvel som unøjagtigheden i perimeteren, kan måske tilskrives skriveren – hvis vi forestiller os at Frontin selv har udført regningerne og dikteret facit.

64/25	= 2, rest 14 = 168'
168'/25	= 6, rest 18' = 432"
432"/25	> 17
ialt	2^q 6' 17" = 2^q 6'½ 5"

Vi mindes om at et antal *scripula* større end 12" ofte tælles som ½ *uncia* + overskydende *scripula*.

§ 43 Denaria, 10-røret



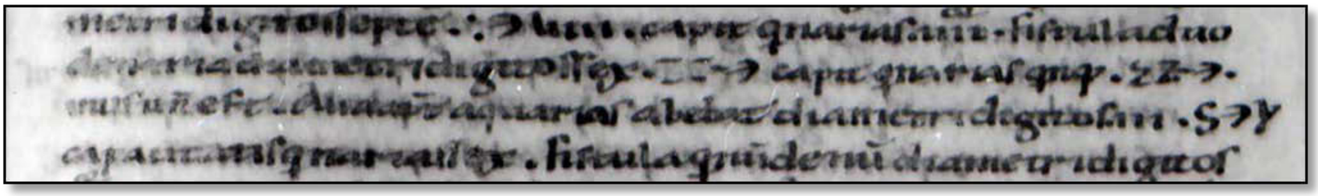
fistuladenaria **diametridigitosduos&semis.** **ꝑimetridigitosseptê = – ƎVIII.** **capit ꝗnarias.IIII^{or}.** D: 2^d 6' P: 7^d 3' 8" C: 4^q	**fistula denaria** **diametri digitos duos et semis** **perimetri digitos septem S = = ƎVII** **capit quinarias IIII** D: 2^d 6' P: 7^d **10' 7"** C: 4^q

Diameter 10/4 *digiti* = 2^d 6'

Perimeter 2^d 6' * 3 = 6^d 18' = 7^d 6'
2^d 6'/ 7 = 30'/ 7 = 28' 48" / 7 < 4' 7"
ialt 7^d 10' 7"
Skriverfejl: et manglende S og en –, VIII i stedet for VII. Ikke forklaret.

Kapaciteten giver sig selv: 100 / 25 = 4

§ 44 Duodenaria, 12-røret



fistuladuodenaria **diametridigitossex·= = –Э** **capit ꝗnariasꝗnq.S = – Э·** **inusunest ·** **aliaapudaquariosabebat** **diametridigitosiii · SЭV** **capacitatisꝗnariassex ·**	**fistula duodenaria** **diametri digitos tres** **perimetri digitos ix = = – Э III** **capit quinarias quinque S = – Э III** **in usu non est** **alia apud aquarios habebat** **diametri digitos III £ ЭVI** **capacitatis quinarias sex**
D: 6^d 9' ?" P: mangler C: 5^q 9' ?" Ikke i brug Andre dimensioner brugt af vandmændene. D: 3^d 6' 5" C: 6^q	D: **3^d** P: **9^d 5' 3**" C: 5^q 9' **3**" Ikke i brug Vandmændene brugte D: 3^d **½' 6"** C: 6^q

Perimeter er udeladt ved en fejl – et spring fra *digitos* (diameterens mål) til [*digito*]*s* ix (perimeteren) og fejllæsning *s ix* som *sex*. **Э [III]** er faldet ud to gange – tabt i margen?

Diameter 12/4 *digiti* = 3^d

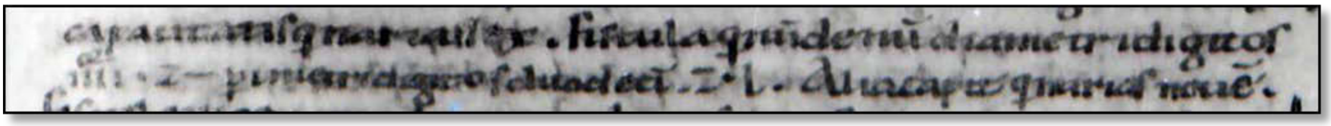
Perimeter	3^d * 3	9^d
	3^d / 7 = 36' / 7 = 35' 24"/ 7 >	5' 3"
	total	**9^d** 5' **3**"

Kapacitet	144 / 25 =	5, rest 19 = 228'
	228'/ 25 =	9', rest 3' = 72"
	72" / 25 <	3".
	ialt	5^q 9' **3**"

12-røret blev ikke brugt, men erstattedes af vandmændene med et hvis kapacitet var præcis 6^q.
Diameteren af det rør udregnes fra de 6 *quinariae* således:
Forholdet af kvadraterne på diametrene er 6:1 = 150:25;
derfor er den aktuelle D = √150 kvarte *digiti*, ca. 12^d 3' / 4 = 3^d 18", som kan skrives
3^q ½' 6", III **£** Э VI, men blev fejlagtigt skrevet som III S Э V{I}, hvor I gik tabt i margen (?)

Kvadratroden af 150 findes (se side 2) af 150 = 144 + 6, og derfor er √150 < 12 + 6/24 = 12^d 3'.

§ 45 Quinum denum, 15-røret



fistulaqnûdenû diametridigitos IIII^{or}.= – pimetridigitosduodecî · = –£ · aliacapitqnarias novê · D: 4^{d} 3' P: 12^{d} 3'½ C: 9^{q}	**fistula quinum denum diametri digitos IIIS = – perimetri digitos undecim S = – Э x capit quinarias novem** D: **3^{d} 9'** P: **11^{d} 9' 10"** C: 9^{q}

Diameter = 15/4 *digiti* = 3^{d} 9'.
Han kan have regnet forkert således: 15 er 1 kvart digitus mindre end 16 kvarte, som er 4 *digiti*... Men i stedet for at trække en kvart fra, lagde han een til. Nogle få afvigelser (i de følgende rør) kan forklares på denne måde.
Oven over IIII læses ^{or} (for at forhindre at det læses som III ?) – men så kan det fjerde I have været et S i tekstforlægget.

Perimeter 3^{d} 9' * 3 = 9^{d} 27' = 11^{d} 3'
3^{d} 9' / 7 = 45' / 7 = 42' 72" / 7 > 6' 10"
ialt 11^{d} 9' 10"

Måske stod der i forlæget XI S **= –** £ (11^{d} 9'½), hvor S blev læst som I, dvs som *duodecim*.
Udregningen er uforklaret.

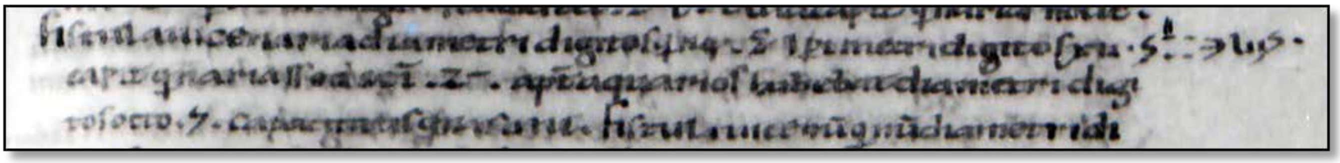
Kapacitet 225/25 = 9^{q} ($15^2 : 5^2$)

I de følgende kapitler er beregningsmetoden en anden. Nu er det arealet af røråbningen der definerer nummeret. 20-røret har åbningen A = 20 (kvadrat) *digiti*, og derudfra udregnes rørets dimensioner. Vi så noget i den retning allerede i det ulovlige 12-rør, som *aquarii* brugte, hvor den givne kapacitet (6 *quinariae*) bestemte diameteren. Denne kan beregnes ved hjælp af formel 2 og uddragning af kvadratrødder (se p. 2); metoden gentages her:

$\sqrt{N} \approx q + t/2q$, hvor q^2 er det største kvadrattal mindre end N, og $t = N - q^2$, eller
$\sqrt{N} \approx q - t/2q$, hvor q^2 er det mindste kvadrattal større end N, og $t = q^2 - N$.
I praksis vælger vi q^2 som det kvadrattal der er nærmest N; jo mindre difference t, desto bedre er tilnærmelsen. Regnemesteren har muligvis haft en kvadrattabel hos sig, eller let kunnet producere en ved hjælp af formelen $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. (Eksempel: $55^2 = 54^2 + 108 + 1$.)

Fra diametrene findes så perimeteren på sædvanlig måde.
Kapaciteten er produktet af arealet (*in casu* 20) og 224/275 (Formel 6 simplificeret, side 3).

§ 46 Vicenaria, 20-røret



fistulavicenaria diametridigitosqnq · £I · ꝑimetridigitosXV.S= = ЭVIS. capitq̶nariassedecî · = –. Apt̲aquarioshabebat diametridigitosocto · S · capacitatisq̶nasXIII. D: 5^d ½' 1" P: 15^d 10' 6"? C: 16^q 3' Andre dimensioner brugt af vandmændene: D: 8^d 6' C: 13^q	**fistula vicenaria diametri digitos quinque £ ЭI perimetri digitos XVS = = ЭVI capit quinarias sedecim = – £ Apud aquarios habebat diametri digitos quadrantes octodecim capacitatis quinarias XIII** D: 5^d ½' 1" P: 15^d 10' 6" C: 16^q 3' **12** " Vandmændene brugte: D: **18 quadrantes = 4^d** 6' C: 13^q

Diameter 11 D ≈ √(154 * 20) = √3080
nærmeste kvadrattal $q^2 = 55^2 = 3025$, t = 55.
11 D ≈ 55 + 55/110
D ≈ $5^d + 1^d/22 = 5^d$ + 288"/22 > 5^d 13" (= 5^d ½' 1", som manus siger, idet der dog mangler Э til at markere *scripula*.)

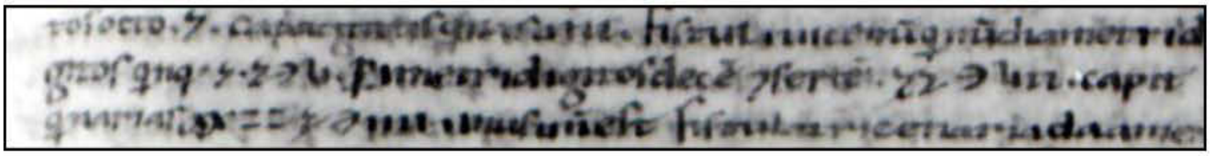
Perimeter 5^d 13" * 3 = 15^d 39" = 15^d 1' 15"
5^d 13" / 7 = 60' 13" / 7 = 56' 109" / 7 > 8' 15"
ialt 15^d 10' 6" (som manus)
Det s-lignende mærke i enden af linien må være på bagsiden.

Kapacitet udregnes med formel 6 simplificeret $C_N = 4N/5 + (4N/5) / 55$.
(Hjælp: 1/55 < 5" ¼)
C_{20} = 16 + 16/55 < 16^q 3' 12". Teksten mangler de 12 *scripula*, ca ¾ mm.

Vandmændene (*aquarii*) brugte et ulovligt rør med kapacitet 13 *quinariae*.

Diameteren (udtrykt i kvarte *digitus*) af dette rør kan findes af forholdet mellem kvadraterne på denne diameter og *quinariens*, $(D:5)^2 = D^2 : 25 = 13:1$ (givet), hvoraf $D^2 = 325$, og derfor D > 18 kvarte = 4^d 6'. Dette sandsynliggør konjekturen *quadrantes octo decim*.

§ 47 Vicenum quinum, 25-røret



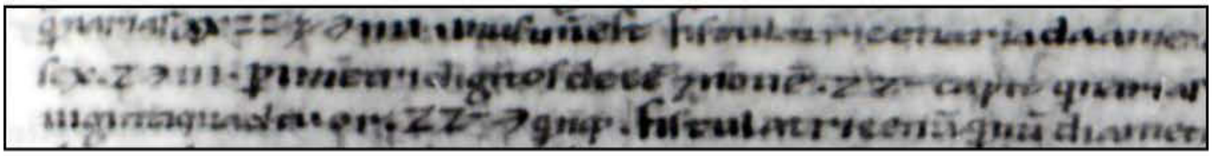
fistulavicenûquinû diametridigitosqnq.S–£ЭV · p̶imetridigitosdecê&septê · S£Э VII · capit q̶narias XX = = £Э IIII. inusuñest	**fistula vicenum quinum diametri digitos quinque S – £Э V perimetri digitos decem et septem S = £ЭVI capit quinarias XX= = ЭVIIII in usu non est**
D: 5^d 7'½ 5" P: 17^d 6'½ 7" C: 20^q 4'½ 4"	D: 5^d 7'½ 5" P: 17^d **8**'½ **6**" C: 20^q 4' **9**"

Diameter
$11\,D \approx \sqrt{(154 * 25)} = \sqrt{3850}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 62^2 = 3844$, $t = 6$
$11\,D \approx 62^d + 6^d / 124 = 62^d + 864''/62 < 62^d\ 14''$
$62^d\ 14'' / 11 = 5^d$, rest $7^d\ 14'' = 84'\ 14''$
$84'\ 14'' / 11 = 7'$, rest $7'\ 14'' = 182''$
$182'' / 11 < 17''$
$D < 5^d\ 7'\ 17''$ ($= 5^d\ 7'½\ 5''$) (som manus)

Perimeter
$P = 2 * (62^d\ 14'') / 7 = 124^d\ 28'' / 7$
$124^d\ 28'' / 7 = 17^d$, rest $5^d\ 28'' = 60'\ 28''$
$60'\ 28'' / 7 = 8'$, rest $4'\ 28'' = 124''$
$124'' / 7 < 18''$
$P < 17^d\ 8'\ 18''$ ($= 17^d\ 8'½\ 6''$)

Kapacitet
$C_{25} = 20 + 20/55 < 20^q\ 4'\ 9''$
Skriveren har 7" for meget, hvorfor? Han synes at have ønsket at stryge tegnet for ½ (£) ; og et V kan være gået tabt i VIIII.

§ 48 Tricenaria, 30-røret



fistulatricenaria dametrisex.= ЭIII. ꝑimetridigitosdecê&novê.= = – capitꝗnariasviginti quadtuor.= = – Эꝗnq.	**fistula tricenaria diametri digitos sex = Э III perimetri digitos decem et novem = = – capit quinarias viginti quattuor = = –Э quinque**
D: 6^d 2' 3" P: 19^d 5' C: 24^q 5' 5"	D: 6^d 2' 3" P: 19^d 5' C: 24^q 5' 5"

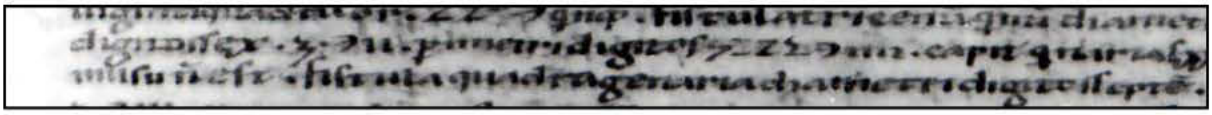
Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 30)} = \sqrt{4620}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 68^2 = 4624$, $t = -4$, $t/2q = -4/136 = -1^d/34 > 8''$
$11\ D \approx 68^d - 1^d/34 < 67^d\ 11'\ 16''$ (= $66^d\ 22'\ 40''$, lettere division med 11)
$66^d\ 22'\ 40''\ /11 < 6^d\ 2'\ 4''$

$D > 6^d\ 2'\ 3''$ (som manus)

Perimeter $P = 2 * (66^d\ 22'\ 40'')\ /\ 7 = 132^d\ 44'\ 80''/\ 7 = 133^d\ 32'\ 80''\ /\ 7 = 133^d\ 35'\ 8''\ /\ 7$
$= 19^d\ 5'\ 1''$ (som manus)

Kapacitet $C_{30} = 24 + 24/55 > 24^q\ 5'\ 5''$ (som manus)

§ 49 Tricenum quinum, 35-røret



fistulatricenûquinû **diametridigitossex.S.Ǝ II.** **p̶imetridigitosS = = £Ǝ IIII.** **capit q̶nariasXX.** **inusuñest**	**fistula tricenum quinum** **diametri digitos sex S = Ǝ II** **perimetri digitos XXS = = – £ ƎV** **capit quinarias XXVIIIS Ǝ II** **in usu non est.**
D: 6^d 6' 2" P: 10'½ 4" C: 20^q	D: 6^d **8**' 2" P: **20^d 11'½ 5**" C: **28^q 6' 2**"

Diameter $11\,D \approx \sqrt{(154 * 35)} = \sqrt{5390}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 73^2 = 5329$, $t = 61$, $t/2q = 61/146 > 1/2 - 1/12 = 5'$

$11\,D \approx 73^d + 61^d/146 = 73^d\ 5'$

$73^d\ 5' /11 = 6^d$, rest $7^d\ 5' = 89'$

$89' / 11 = 8'$, rest $1' = 24''$

$24'' / 11 > 2''$

$D > 6^d\ 8'\ 2''$

Perimeter $P = 2 * (73^d\ 5') / 7 = 146^d\ 10' / 7 = 20^d$, rest $6^d\ 10' = 82'$

$82' / 7 = 11'$, rest $5' = 120''$

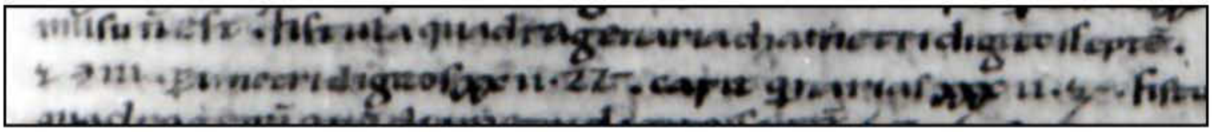
$120''/ 7 > 17''$

$P > 20^d\ 11'\ 17''$

Kapacitet $C_{35} = 28 + 28/55 > 28^q\ 6'\ 2''$

Diametren er næsten korrekt, de andre fejl savner forklaring. Afskriveren ikke fortrolig med romertal ?

§ 50 Quadragenaria, 40-røret



fistulaquadragenaria **diametridigitoseptê.£Э III.** **ꝑimetridigitosXXII.= = –.** **capit ꝗnariasXXXII.S–.** D: 7^d ½' 3" P: 22^d 5' C: 32^q 7'	**fistula quadragenaria** **diametri digitos septem– £ ЭIII** **perimetri digitos XXII = = – ЭII** **capit quinarias XXXII S –** D:7^d **1**'½ 3" P: 22^d 5' **2**" C: 32^q 7'

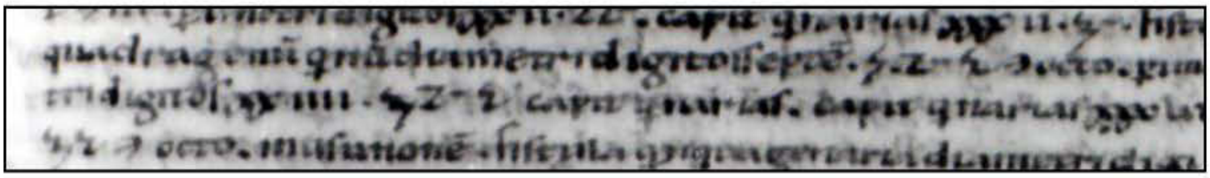
Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 40)} = \sqrt{6160}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 78^2 = 6084$, $t = 76$ $t/2q = 76/156 = 19/39$
$11\ D \approx 78^d + 76^d/156 > 78^d\ 5'\ 20"$
$78^d\ 5'\ 20" / 11 = 7^d$, rest $1^d\ 5'\ 20" = 17'\ 20"$
$17'\ 20" / 11 = 1'$, rest $6'\ 20" = 164"$
$164" / 11 < 15"$
$D < 7^d\ 1'\ 15"$ (som manus, en – kan være tabt i margen)

Perimeter $P = 2 * (78^d\ 5'\ 20") / 7 < 156^d\ 10'\ 40"/ 7 = 154^d\ 35'\ 16"/ 7 > 22^d\ 5'\ 2"$ (minimal fejl)

Kapacitet $C_{40} = 32 + 32/55 < 32^q\ 7'$ (som manus)

Dette rør og 30-røret efterlader ingen tvivl: metoderne og regningerne var fuldtud forståede, og det betyder at de fejl og afvigelser vi finder i manuskriptet, roligt kan tilskrives afskriveren eller hans kilde. Der kan også tænkes at han har fejlaflæst sin abacus – skønt vi nok må antage at Frontin har foretaget en omhyggelig korrektur-regning.

§ 51 Quadragenum quinum, 45-røret



fistulaquadragenûquinû diametridigitosseptê.S. = – £Э octo. ꝑimetridigitosXXIIII.S = – £. capitꝗnarias. capitꝗnariasXXXVI. S £ Э octo inusunonê D: 7^d 9'½ 8" P: 24^d 9'½ C: 36^q 6'½ 8"	**fistula quadragenum quinum diametri digitos septem S£ Эocto perimetri digitos XXIIIS = – Э X capit quinarias XXXVI S –£Э octo in usu non est** D: 7^d 6'½ 8" P: 23^d 9' 10" C: 36^q 7'½ 8"

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 45)} = \sqrt{6930}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 83^2 = 6889$, $t = 41$ $t/2q = 41/166 = 1/4 - 1/332$

$11\ D \approx 83^d + 41^d/166 = 83^d\ 2'\ 23''$

$83^d\ 2'\ 23'' / 11 = 7^d$, rest $6^d\ 2'\ 23'' = 74'\ 23''$

$74'\ 23'' / 11 = 6'$, rest $8'\ 23'' = 215''$

$215'' / 11 < 20''$

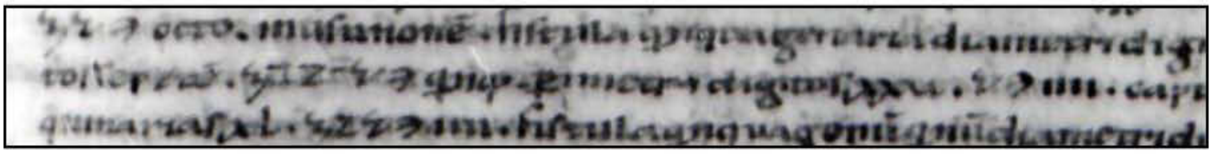
$D < 7^d\ 6'\ 20''$

Perimeter $P = 2 * (83^d\ 2'\ 23'') / 7 = (166^d\ 5'\ 22'') / 7 = (161^d\ 65'\ 22'')/7$

$= 161^d\ 63'\ 70'' / 7 = 23^d\ 9'\ 10''$

Kapacitet $C_{45} = 36 + 36/55 > 36^q\ 7'\ 20''$

§ 52 Quinquagenaria, 50-røret



fistulaquîquagenaria **diametridigitos septê.S= = – £Э qnq.** **ꝑimetridigitosXXV.£Э IIII.** **capitqnariasXL. S = £Э IIII**	**fistula quinquagenaria** **diametri digitos septem S= = – £Э quinque** **perimetri digitos XXV £Э VIII** **capit XLS = £ЭV**
D: 7^d 11'½ 5" P: 25^d ½' 4" C: 40^q 8'½ 4"	D: 7^d 11'½ 5" P: 25^d ½' **8**" C: 40^q 8'½ **5**"

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 50)} = \sqrt{7700}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 88^2 = 7744$, $t = -44$ $t/2q = -44/176$

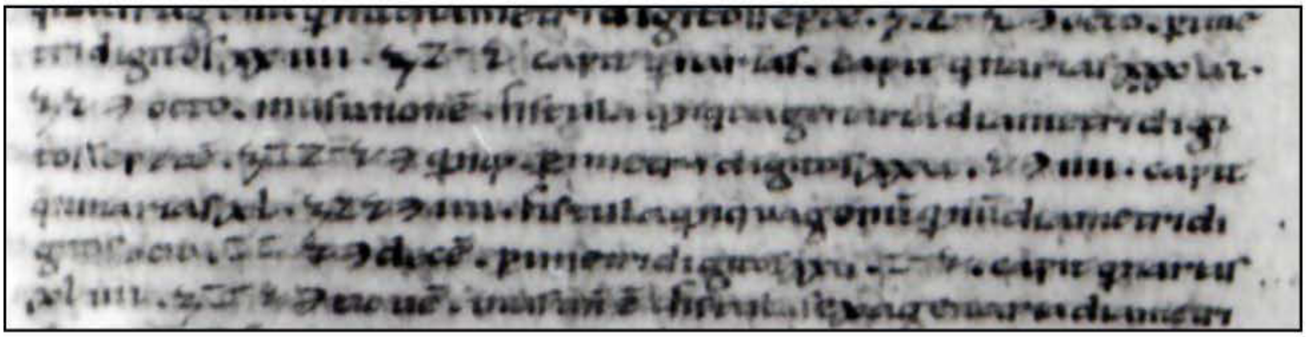
$11\ D \approx 88^d - 44^d/176$

$D < 8^d - 6'' = 7^d 11'\ 18''$ $(= 7^d\ 11'½\ 5'')$

Perimeter $P = 2 * (87^d\ 9') / 7 = 175^d\ 6' / 7 > 25^d\ 20''$ (som manus, hvis et I bør være V)

Kapacitet $C_{50} = 40 + 40/55 > 40^q\ 8'\ 17''$ (som manus bortset fra 1 scr)

§ 53 Quinquagenum quinum, 55-røret



fistulaquîquagenûquinû diametridigitosocto.= = £ Э decê ꝑimetridigitosXXV = – £. capitꝗnariasXLIIII.S = – £ Э novê. inusuñ ê D: 8^d 4'½ 10" P: 25^d 3'½ C: 44^q 9'½ 9"	**fistula quinquagenum quinum diametri digitos octo = = Э decem perimetri digitos XXVI = – £ ЭI capit quinarias XLIIII.S = –£Э duo in usu non est.** D: 8^d 4' 10" P: 26^d 3'½ 1" C: 44^q 9'½ 2"

Diameter $11\text{ D} \approx \sqrt{(154 * 55)} = \sqrt{8470}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 92^2 = 8464$, $t = 6$ $t/2q = 6/184$

$11\text{ D} \approx 92^d + 3^d/92 > 92^d\ 9''$

$92^d\ 9'' / 11 = 8^d$, rest $4^d\ 9'' = 48'\ 9''$

$48'\ 9'' / 11 = 4'$, rest $4'\ 9'' = 105''$

$105'' / 11 < 10''$

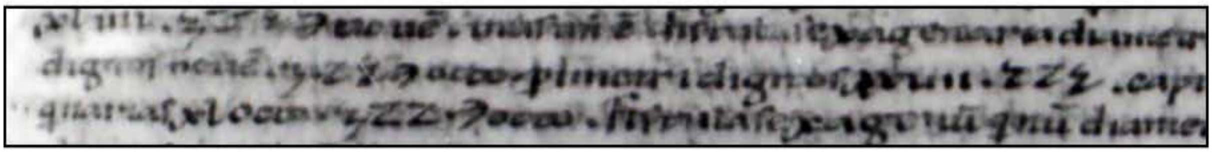
$\text{D} < 8^d\ 4'\ 10''$

En kortere metode, fordi 11 går op i 55: $\text{D} \approx \sqrt{(55*14/11)} = \sqrt{70} < 8 + 3/8 = 8^d\ 4'\ 12''$

Perimeter $\text{P} = 2 * (92^d\ 9'') / 7 = 184^d\ 18'' / 7 = 182^d\ 24'\ 18'' / 7 < 26^d\ 3'\ 13''$

Kapacitet $C_{55} = 44 + 44/55 > 44^q\ 9'\ 14''$

§ 54 Sexagenaria, 60-røret



fistulasexagenaria **diametridigitosnovêS =£Э octo** **ꝑimetridigitosXXVII S = £.** **capit ꝗnariasXLocto.S= =. Э octo**	**fistula sexagenaria** **diametri digitos octo S=£ Эocto** **perimetri digitos XXVII = = – £ ЭII** **capit quinarias XLocto S = = Э undecim**
D: 9^d 8'½ 8" P: 27^d 8'½ C: 48^q 10' 8"	D: 8^d 8'½ 8" P: 27^d 5'½ 2" C: 48^q 10' 11"

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 60)} = \sqrt{9240}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 96^2 = 9216$, $t = 24$ $t/2q = 24/192 = 1/8$

$11\ D \approx 96^d + 1^d/8 = 96^d\ 1'\ 12''$

$96^d\ 1'\ 12'' / 11 = 8^d$, rest $8^d\ 1'\ 12'' = 97'\ 12''$

$97'\ 12'' / 11 = 8'$, rest $9'\ 12'' = 228''$

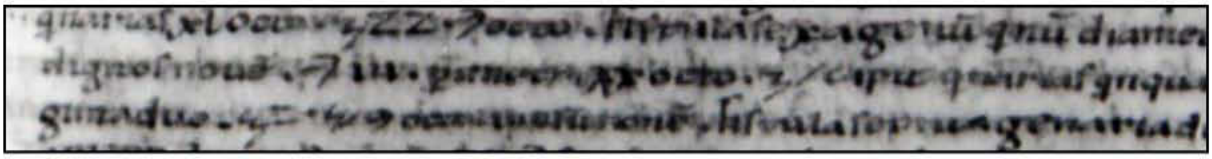
$228'' / 11 < 21''$

$D < 8^d\ 8'\ 21''$

Perimeter $P = 2 * (96^d\ 1'\ 12'') / 7 = 192^d\ 3' / 7 = 189^d\ 39' / 7 < 27^d\ 5'\ 14''$

Kapacitet $C_{60} = 48 + 48/55 > 48^q\ 10'\ 11''$

§ 55 Sexagenum quinum, 65-røret



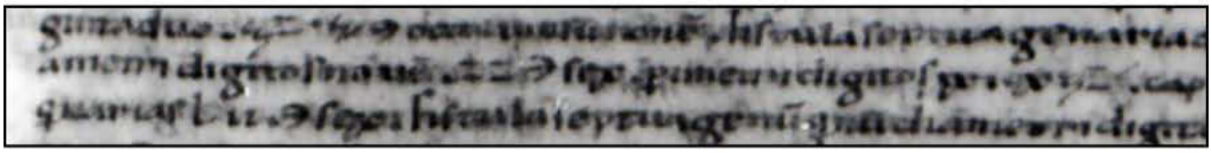
fistulasexagenûquinû diametridigitosnovê. – Э III. ꝑimetri.XXocto.S – capitꝗnariasqnquagintaduo.S= – ₤Эocto. inusunoñê.	**fistula sexagenum quinum diametri digitos novem – Э III, perimetri digitos XX octo S – capit quinarias quinquagintaduo S = = – Э octo. in usu non est.**
D: 9^d 1' 3" P: 28^d 7' C: 52^q 9'½ 8" ikke i brug	D: 9^d 1' 3" P: 28^d 7' C: 52^q **11** 8" ikke i brug

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 65)} = \sqrt{10010}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 100^2 = 10000$, $t = 10$
$11\ D \approx 100^d + 1^d/20 > 99^d\ 12'\ 14''$
$D > 9^d\ 1'\ 3''$

Perimeter $P = 2 * (100^d\ 14'') / 7 = 200^d\ 1'\ 4'' / 7 = 196^d\ 49'\ 4''/ 7 > 28^d\ 7'$

Kapacitet $C_{65} = 52 + 52/55 > 52^q\ 11'\ 8''$

§ 56 Septuagenaria, 70-røret



fistulaseptuagenaria diametridigitosnovê.= = Э sex. ꝑimetridigitosXXIXS =. capit ꝗnariasLII.Эsex.	**fistula septuagenaria diametri digitos novem = = – Э sex perimetri digitos XXIX S = capit quinarias LVII Э sex**
D: 9^d 4' 6" P: 29^d 8' C: 52^q 6"	D: 9^d 5' 6" P: 29^d 8' C: 57^q 6"

Diameter $\quad 11\ D \approx \sqrt{(154 * 70)} = \sqrt{10780}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 104^2 = 10816$, $t = -36$ $\quad t/2q = -36/208 = 9/52$

$11\ D \approx 104^d - 9^d/52 > 103^d\ 9'\ 22''$

$103^d\ 9'\ 22'' / 11 = 9^d$, rest $4^d\ 9'\ 22'' = 57'\ 22''$

$57'\ 22'' / 11 = 5'$, rest $2'\ 22'' = 70''$

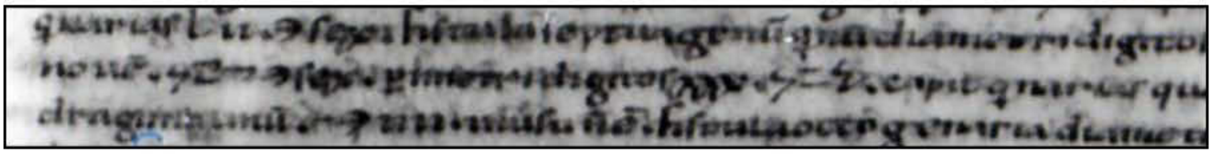
$70'' / 11 > 6''$

$D < 9^d\ 5'\ 6''$ (som manus ?)

Perimeter $\quad P = 2 * (103^d\ 9'\ 22'') / 7 = (206^d\ 18'\ 44'') / 7 = (203^d\ 56' - 4'') / 7 < 29^d\ 8'$ (som manus)

Kapacitet $\quad C_{70} = 56 + 56/55 > 57^q\ 5''$ (som manus, $1/55 > 5''$)

§ 57 Septuagenum quinum, 75-røret



fistulaseptuagenûqnû diametridigitosnovê.S = –Ǝsex. ꝑimetridigitosXXX S =£. capit ꝗnarias quadragintaunû.–ƎIIII. inusuñê.	**fistula septuagenum quinum diametri digitos novem S = – Ǝ sex perimetri digitos XXX S = £ capit quinarias sexagintaunam – ƎII in usu non est.**
D: 9^d 9' 6" P: 30^d 8'½ C: 41^q 1' 4" ! ikke i brug	D: 9^d 9' 6" P: 30^d 8'½ C: **61^q** 1' **2**" ikke i brug

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 75)} = \sqrt{11550}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = (107½)^2 = 11556\ 1/4$, $t = -6\ ¼$ $t/2q = -25/860 = -5/172$
$11\ D \approx 107^d\ 6' - 5^d/172 < 107^d\ 5'\ 16"$
$107^d\ 5'\ 16" / 11 = 9^d$, rest $8^d\ 5'\ 16" = 101'\ 16"$
$101'\ 16" / 11 = 9'$, rest $2'\ 16" = 64"$
$64" / 11 < 6"$ (som manus)

Perimeter $P = 22 * (9^d\ 9'\ 6") / 7 = (198^d\ 198'\ 132") / 7 = 214^d\ 11'\ 12" / 7$
$214^d\ 11'\ 12" / 7 = 30^d$, rest $4^d\ 11'\ 12" = 59'\ 12"$
$59'\ 12" / 7 = 8'$, rest $3'\ 12" = 84"$
$84" / 7 = 12"$ (som manus)

Kapacitet $C_{75} = 60 + 60/55 > 61^q\ 1'\ 2"$

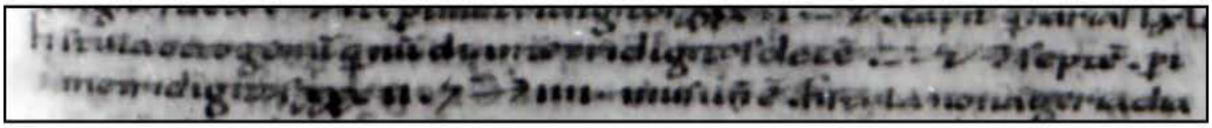
Ms C 361's *quadraginta* for *sexaginta* kan være LXI læst eller skrevet XLI i forlægget.

§ 58 Octogenaria, 80-røret

fistulaoctogenaria **diametridigitosdecê.– Э II.** **ꝑimetridigitosXXXii.= £.** **capit ꝗnariasLXV.=** D: 10^d 1' 2" P: 32^d 2'½ C: 65^q 2'	**fistula octogenaria** **diametri digitos decem – Э II** **perimetri digitos XXXI S = £ ЭI** **capit quinarias LXV =** D: 10^d 1' 2" P: 31^d 8'½ 1" C: 65^q 2'

Diameter	$11\ D \approx \sqrt{(154 * 80)} = 4\sqrt{154*5} = 4\sqrt{770}$ nærmeste kvadrattal $q^2 = 28^2 = 784$, $t = -14$ $11\ D \approx 4*27\ ¾ = 111^d$ $D > 10^d$ 1' 2"	$t/2q = -14/56 = -1/4$ (som manus)
Perimeter	$P = 2 * 111^d / 7 = (217^d + 5^d) / 7 > 31^d$ 8' 13"	(et S faldet ud foran =)
Kapacitet	$C_{80} = 64 + 64/55 > 65^q$ 1' 23"	(som manus)

§ 59 Octogenum quinum, 85-røret



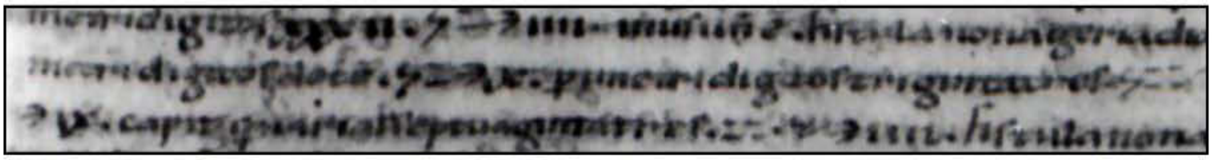
fistulaoctogenûqnû **diametridigitosdecê.= = £Э septê** **ꝑimetridigitosXXXII.S =Э IIII** **inusuñê**	**fistula octogenum quinum** **diametri digitos decem = = £Э septem** **perimetri digitos XXXII S = ЭVII** **capit quinarias LXVIIII = £Э octo** **in usu non est**
D: 10^d 4'½ 7" P: 32^d 8' 4" C: mangler	D: 10^d 4'½ 7" P: 32^d 8' 7" C: **69 2'½ 8"**

Diameter $11\,D \approx \sqrt{(154 * 85)} = \sqrt{13090}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 114^2 = 12996$, $t = 94$
$11\,D \approx 114 + 47/114 > 114^d\ 4'\ 22''$
$114^d\ 4'\ 22'' / 11 = 10^d$, rest $4^d\ 4'\ 22'' = 52'\ 22''$
$52'\ 22'' / 11 \quad = \quad 4'$, rest $8'\ 22'' = 214''$
$214'' / 11 \quad > \quad 19''$
$D > 10^d\ 4'\ 19''$

Perimeter $P = 2 * (114^d\ 4'\ 22'')/ 7 = (224^d\ 56'\ 44'') / 7 > 32^d\ 8'\ 6''$
IIII læses let i stedet for VII

Kapacitet $C_{85} = 68 + 68/55 = 69^q\ 2'\ 20''$

§ 60 Nonagenaria, 90-røret



fistulanonageria	**fistula nonagenaria**
diametridigitosdecê.S = Э X.	**diametri digitos decem S = Э XI**
ꝑimetridigitostrigintatres.S = = – ЭIX	**perimetri digitos triginta tres S– £ ЭIII**
capit ꝗnariasseptuagintatres.= =. £Э IIII	**capit quinarias septuaginta tres = – £ЭV**
D: 10^d 8' 10"	D: 10^d 8' 10"
P: 33^d 11' 9"	P: 33^d 7'½ 3"
C: 73^q 4'½ 4"	C: 73^q 3'½ 5"

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 90)} = \sqrt{13860}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 118^2 = 13924$, $t = -64$ $t/2q = -64/236 = -16/59$

$11\ D \approx 118^d - 16^d/59 = 118^d - 3'\ 6" = 117^d\ 8'\ 18"$

$117^d\ 8'\ 18" / 11 = 10^d$, rest $7^d\ 8'\ 18" = 92'\ 18"$

$92'\ 18" / 11 = 8'$, rest $4'\ 18" = 114"$

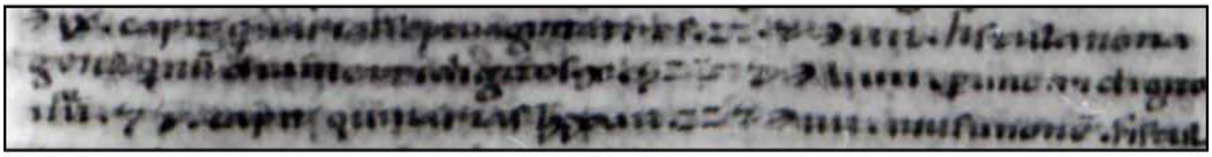
$114" / 11 > 10"$

$D < 10^d\ 8'\ 11"$

Perimeter $P = 2 * (117^d\ 8'\ 18")/ 7 = (235^d\ 5'\ 12")/ 7 < 33^d\ 7'\ 15"$

Kapacitet $C_{90} = 72 + 72/55 = 73^q\ 3'\ 17"$

§ 61 Nonagenum quinum, 95-røret



fistulanonagenûqnû diametridigitosX.S = = – £Э VIIII ꝑimetridigitosIIII^{or}.S £ capit qnariasLXXVII.= = £ЭIIII inusunonê.	**fistula nonagenum quinum diametri digitos X S = = – £ ЭXI perimetri digitos XXXIIII S £ ЭV capit quinarias LXXVII = = £ ЭII in usu non est**
D: 10^d 11'½ 9" P: 4^d 6'½ C: 77^q 4'½ 4"	D: 10^d 11'½ 11" P: **34**^{d} 6'½ 5" C: 77^q 4'½ **2**"

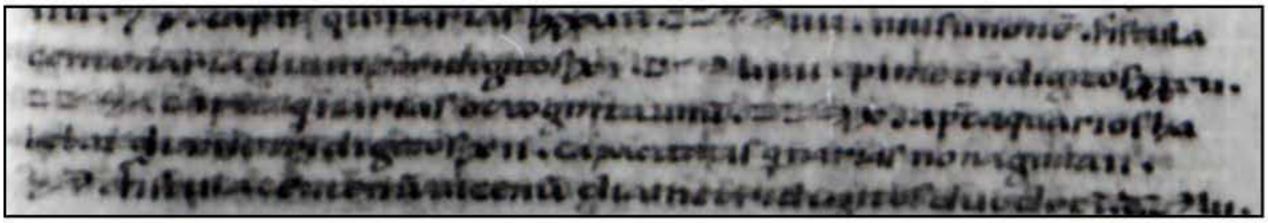
Diameter $\quad 11\ D \approx \sqrt{(154 * 95)} = \sqrt{14630}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 121^2 = 14641$, $t = -11$ $\quad t/2q = -11/242 = 1/22$
$11\ D \approx 121 - 1/22 = 121 - 13''$
$D < 11^d - 1'' = 10^d\ 11'½\ 11''$

Perimeter $\quad P = 2 * (121^d - 1/22)/7 = (238^d + 48' - 26'')/7 = (238^d\ 42'\ 118'')/7$
$< 34^d\ 6'\ 17''$

Kapacitet $\quad C_{95} = 76 + 76/55 < 7^q\ 4'\ 14''$

Perimeterens XXX kan være faldet ud under kopiering. "Fejlene" i *scripula* er ikke signifikante – hvor omhyggelig bør man være ved at omsætte syvendedele og elvtedele til tolvtedele? For slet ikke at tale om 55indstyvendedele. Vigtigere er det indtryk at der overvejende foreligger korrekte beregninger.

§ 62 Centenaria, 100-røret



fistulacentenaria **diametridigitosXI.= –Э VIIII.** **pimetridigitosXXXV.= = – £.** **capit ꝗnariasoctogintaunû.= = –ЭX.** **apudaquarios habebat** **diametridigitos XII.** **capacitatisꝗnariasnonagintaII.£Э.**	**fistula centenaria** **diametri digitos XI = – ЭVIIII** **perimetri digitos XXXV = = – £** **capit quinarias octoginta unam = = – ЭX** **apud aquarios habebat** **diametri digitos XII** **capacitatis quinarias nonaginta II.**
D: 11^d 3' 9" P: 35^d 5'½ C: 81^q 5' 10"	D: 11^d 3' 9" P: 35^d 5'½ C: 81^q 5' 10"
apud aquarios habebat D: 12^d C: 92^q ½'	apud aquarios habebat D: 12^d C: 92^q **2´**

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 100)} = \sqrt{15400}$

nærmeste kvadrattal $q^2 = 15376 = 124^2$, $t = 24$ $\qquad t/2q = 24/248 = 3/31$

$11\ D \approx 124 + 3/31 < 124^d\ 1'\ 4''$

$124^d\ 1'\ 4'' / 11 = 11^d$, rest $3^d\ 1'\ 4'' = 37'\ 4''$

$37'\ 4'' / 11 \quad = 3'$, rest $4'\ 4'' = 100''$

$100'' / 11 \quad > 9''$

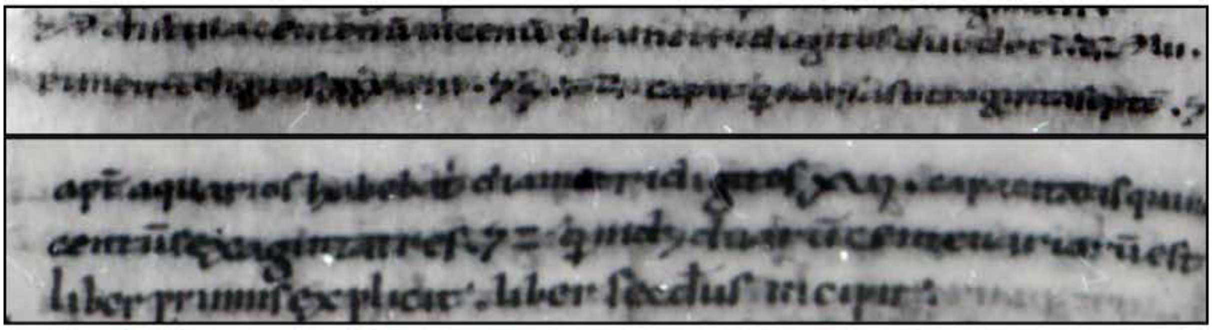
$D \approx 11^d\ 3'\ 9''$

Perimeter $P = 2 * (124^d\ 1'\ 4'')/ 7 = (245^d\ 38'\ 8'') / 7 < 35^d\ 5'\ 12''$

Kapacitet $C_{100} = 80 + 80/55 < 81^q\ 5'\ 11''$

Vandmændene brugte en diameter på 12^d, sandsynligvis beregnet fra de 92^q på følgende måde, idet den sammenlignes med 5-ørets kapacitet 1^q:
Forholdet mellem diametrenes kvadrater er 92,17:1 = 2304:25; derfor er diametren $\sqrt{2304}$ = 48 kvarte fingre, 48/4 = 12.
Teksten siger ikke noget om rørets åbning, ca. 113. Det blev muligvis brugt i stedet for de ubrugte 105, 110, 115, men det er rent gætværk.

§ 63 Centenum vicenum, 120-røret



fistulacentenûvicenû **diametridigitosduodecî = = Э vi ·** **ꝑimetridigitosXXXVIII · SS · = = ·** **capitq̶nariasnonagintaseptem S =** **apṯaquarioshabebatdiametridigitos xui.** **Capacitatisquinariascentûsexaginta** **tres.S = – ꝗmdusduarûcentenarûest.** D: 12^d 4' 6" P: 38^d 10' C: 97^q 8' apud aquarios habebat D: 16^d C: 163^q 9'	**fistula centenum vicenum** **diametri digitos duodecim = = ЭVII** **perimetri digitos XXXVIII.S = = ЭII** **capit quinarias nonaginta septem S = –** **apud aquarios habebat diametri digitos XVI,** **capacitatis quinarias centum sexaginta tres.S = = ЭII** **qui modus duarum centenarum est.** D: 12^d 4' 7" P: 38^d 10' 2" C: 97^q 8' 22" apud aquarios habebat D: 16^d C: 163^q 10' 2"

Diameter $11\ D \approx \sqrt{(154 * 120)} = \sqrt{(18480}$
nærmeste kvadrattal $q^2 = 18496 = 136^2$, $t = -16$ $t/2q = -16/272 = 1/17$
$11\ D \approx 136 - 1/17 => 135^d\ 11'\ 7"$
$135^d\ 11'\ 7" / 11 = 12^d$, rest $3^d\ 11'\ 7" = 47'\ 7"$
$47'\ 7" / 11 = 4'$, rest $3'\ 7" = 79"$
$79" / 11 > 7"$
$D > 12^d\ 4'\ 7"$

Perimeter $P = 2 * (136 - 1/17) / 7 = (271^d\ 10'\ 14") / 7 = 38^d\ 10'\ 2"$

Kapacitet $C_{120} = 96 + 96/55 > 97^q\ 8'\ 22"$

Den kapacitet vandmændene brugte, er udregnet fra 5-røret: Eftersom 16 digiti = 64 kvarte, er forholdet mellem diametrene $(64:5)^2 = 4096:25 = 163 + 21/25 < 163^q\ 10'\ 2"$.

Åbningen A er $11 * D^2/14 = 11 * 256/14 = 2816/14 > 201$, altså to 100-rør.

Note:

Dette arbejde er frugten af en forenet indsats fra cand. mag. Jørgen Martin Hansen og dr. phil. Christian Marinus Taisbak – en indsats der danner en slags afrunding af Hansens livslange arbejde med Frontinus. Metoden og de udførte emendationer skal danne grundlag for en kommende nyudgave af den danske frontinoversættelse. Basis for arbejdet er en scannet microfilm af C361, fra et første besøg i Abbazia di Monte Cassino i 1974.
I temmelig lang tid har vi studeret og diskuteret denne "håndbog for blystøbere". Ved at imitere en speciel abacus med riller til de forskellige størrelsesordner af dimensionerne (enere, 12'tedele, 288'indstyvendedele) har Taisbak skaffet os et grundlag for en utraditionel tekstkritik, som forekommer os tilstrækkelig pålidelig, ikke mindst fordi så mange af vore resultater stemmer med den overleverede tekst. Men – det er åbenbart at de tal der angives i manuskriptet, er langt nøjagtigere (ned til 1/10 mm) end *plumbarius* behøvede; derfor må hele passagen betragtes som *ren teoretisk matematik*, snarere end som en nyttig instruktion for arbejderne såvel som for rørledningernes ejere.

Christian Marinus Taisbak: marinus@mail.dk
Jørgen Martin Hansen: curatoraquarum@hotmail.com

Appendix: TALNOTATION

1. Notationen af scripula (Э): Med tal eller bogstaver?

Kap.	Rør	Type	Notation (Venstre kolonne)	Note	Э Med taltegn	Э Ialt Antal forekomster	Э Med bogstaver	Э Ialt Antal forekomster
40	6	perim	Э III		Э II	2		
42	8	qnariae	Э ꝗnq		Э III	4		
43	10	perim	Э VIII		Э IIII	7		
44	12	diam	Э V	Apud aquarios	Э V	1	Э ꝗnq	3
46	20	perim	Э VI		Э VI	2	Э sex	2
47	25	perim	Э VII		Э VII	1	Э septê	1
		qnariae	Э IIII		Э VIII	1	Э octo	5
48	30	diam	Э III		Э VIIII	4	Э novê	1
		qnariae	Э ꝗnq		Э IX	1		
49	35	diam	Э II		Э X	2	Э decê	1
		perim	Э IIII		Ialt	24		13
50	40	diam	Э III					
51	45	diam	Э octo					
		qnariae	Э octo					
52	50	diam	Э ꝗnq					
		perim	Э IIII					
		qnariae	Э IIII					
53	55	diam	Э decê					
		qnariae	Э novê					
54	60	diam	Э octo					
		qnariae	Э octo					
55	65	diam	Э III					
		qnariae	Э octo					
56	70	diam	Э sex					
57	75	diam	Э sex					
		qnariae	Э IIII					
58	80	diam	Э II					
59	85	diam	Э septê					
		perim	Э IIII					

60	90	diam	Э X						
		perim	Э IX						
		qnariae	Э IIII						
61	95	diam	Э VIIII						
		qnariae	Э IIII						
62	100	diam	Э VIIII						
		qnariae	Э X						
63	120	diam	Э VI						
Forekomster ialt	37								

2. Andre stavemåder.

habebat	§ 46,62,63	3
abebat	§ 44	1
Quadtuor	§48	1
IIII[or]	§§ 39,40,43,45	4
IIII	§§ 47,49,52,52,57,59,60,61	8

3. Semis and semuncia

Notation	Beskrivelse	Kapitel/ rør	Transkription	Bemærkninger
S (SEMIS) Forskellig notation, inddelt i 5 typer.				
 S1	S1 Stiliseret "S", gennemstreget	39, 5	S	
 S2a	S2 "Jing-jang" Den venstre nedstreg afgør at det betyder Semis.	42,8		
 S2b	Ditto, med ekstra lang nedstreg tv.	49,35		
 S2c	Ditto	56,70		

 S3	S3 "Halvotte 8" , med begge kurver åbne til højre side. Ligner S2 lidt men har nedstreg til højre.	44,12		Når nedstregen går til højre kunne det forveksles med £-tegnet, men sammenhængen vil afgøre at det skal læses som Semis.
 S4	Et regulært S	44,12		In 44,12 bruges to forskellige notationer (S3 og S4) i to nabolinjer!
 S5	S med lang nedstreg til venstre, bruges til med effect til at afslutte en linje	46,20		
SEMUNCIA (1/24) Types of notations				
 SM1	< "liggende vinkel"	40,6	£	Synes kun brugt i dette ene tilfælde, hvor der for første gang er brug for 1/24-tegnet i hele talserien. Måske var systematikken ikke på plads. Siden bruges tegnene SM1-5, jf. nedenfor.
Nabopositioner af de to taltegn Semis (S) og Semuncia (SM). Alle forekomster angivet.				
SSM1	 De to tegn er meget ens, men skal læses S £ - men de har begge nedstreg til venstre.	42,8		
 SSM2	S£ - sidstnævnte har tydeligere nedstreg til højre.	47,25		Eneste tilfælde med et punkt til tegnadskillelse.
 SSM3	S£ i samme §: Også her har £ tydeligere afslutning th.	47,25		
 SSM 4	Skal læses S£. S har nedstreg tv, £ th.	51,45		
 SSM5	Næsten to Semis-tegn, men der skal læses S og £. Ligner SSM2 lidt.	63,120		