Noli istum disturbare... Archimedes i gymnasiet

af Sebastian Andersen, Bent Christensen, Eva Engelund-Mikkelsen, Claus Glunk, Jesper Højgaard, Mathias Manly, Hanne Eggert Strand, Chr. Marinus Taisbak og Chr. Gorm Tortzen

Gennem en længere årrække har Marinus samarbejdet med klassikerne på Helsingør Gymnasium om tre videnskabshistoriske projekter. Det første drejede sig om matematikken i Ole Rømers afhandlinger, det næste var en skolebogsudgave af to tekster, der klæder hinanden godt men aldrig var blevet bragt sammen før: Platons dialog *Menon* og Euklids *Elementer* I-II, sidstnævnte med en omfangsrig og lærd kommentar af Marinus.[1] Denne artikel er det foreløbige resultat af et tredje projekt, som vi begyndte på for fem-seks år siden, og hvortil Marinus forlængst har leveret en tekst og en vigtig kommentar – han optræder med andre ord ganske uafvidende som bidragyder til sit eget festskrift. Projektet går kort og godt ud på at oversætte og kommentere en række tekster om universalgeniet Archimedes, der egner sig til gymnasiets undervisning i matematik, fysik, historie, de klassiske fag og ikke mindst i almen studieforberedelse, hvis hovedformål er at få forskellige fag til i fællesskab at give nye indsigter.

Nedenstående er kun det første resultat, og tekstmængden kan udvides i det næsten uendelige, selvom en stor del af Archimedes' omfangsrige produktion nok er for skrap kost for de fleste gymnasieelever.

Teksterne er opdelt i tre hovedafsnit: (1) oversættelser af Archimedes egne værker, (2) oversættelser af andre antikke forfatteres beskrivelse af Archimedes og hans mekaniske konstruktioner, (3) korte senere beretninger om Archimedes' liv og virkningshistorie i antikken.

1. Tekster af Archimedes

1.1 Vægtstangsreglen (CMT)

1.2 Cirklens måling (HS og CGT)

1.3 Appendix til Cirklens måling (CMT)

1.4 Om benævnelsen af store tal (CG og CGT)

1.5 Solgudens okser (MM, CG og CGT)

---

1. Claus Glunk, Hanne E. Strand, Chr. Marinus Taisbak og Chr. Gorm Tortzen: *QED Platon og Euklid tegner og fortæller* (Gyldendal 2006).

I disse afsnit har vi i nogle tilfælde brudt en ellers ubrydelig CMT-regel: 'Brug aldrig moderne notation'. Det skyldes dels, at vi selv skulle være sikre på, at vi havde forstået det græske geni rigtigt, dels at vi hele tiden har haft gymnasiets elever og lærere i tanken. Større ånder bedes venligst se bort fra de forklarende omskrivninger.

2. **Andres fremstillinger af Archimedes' fysiske og mekaniske opdagelser**

2.1 Vitruvius: Kong Hierons guldkrans (BC)

2.2 Vitruvius: Archimedes' skrue (BC)

2.3 Plutarch: Archimedes som våbeningeniør (MM og CGT)

3. Archimedes som den ideelle videnskabsmand

3.1 Cicero: Archimedes' globus (SA)

3.2 Cicero: Archimedes' grav (EE og JH)

3.3 Valerius Maximus: Forstyr ikke! (CGT)

3.3 Quintilian: Geometri er nyttig for unge mennesker (SA)

Hvor intet andet er angivet, er illustrationerne udført af JH.

Som sagt er dette kun en første begyndelse. Vi håber i den kommende tid at kunne udvide udvalget og regner med støtte og inspiration fra CMT; der er allerede flere opgaver, som venter på, at hans skarpe blik for manglende matematisk og sproglig præcision skal luge ud - herunder i vores kommaer. Vi ville også have været mere trygge ved det herværende resultat, hvis Marinus havde læst korrektur på vores fremstilling af sagen – men som fødselsdagsbarn var han naturligvis udelukket fra at være med til at pakke gaven ind.

Hvad vi ved om Archimedes?

Archimedes (ca. 287-212 f.Kr.) er en af oldtidens største naturvidenskabsmænd, og både inden for fysik og matematik har han sat sig varige spor. Han blev født i den græske koloni Syrakus på Sicilien og levede hele sit liv i byen kun afbrudt af en eller to rejser til den nye verdens hovedstad Alexandria.

Hieron var tyran, senere konge i Syrakus i årene 271-216. Archimedes var en nær ven af Hieron, og flere af hans opdagelser sættes i filosofihistorien i forbindelse med kongen. I Den anden puniske Krig mellem Rom og Karthago (218-201) spillede Hieron en vigtig rolle som romernes trofaste allierede, men efter hans død kom en nevø af Hieron på tronen. Han forsøgte i sin korte regeringstid at balancere mellem de to krigsførende magter og støttede snart den ene snart den anden. Efter 13 måneder blev han myrdet, og to efterfølgende punervenlige generalers politik medførte, at romerne mistede tålmodigheden og lod Caius Claudius Marcellus belejre byen, som faldt i 212.

Archimedes, der ved denne lejlighed blev dræbt af en romersk soldat, har efterladt sig mange værker, som behandler de mest forskelligartede fysiske og matematiske problemer. Disse bøger er skrevet i et matematisk-fysisk fagsprog svarende til Euklids, nogle på dorisk græsk, andre på koiné; nogle af hans værker har kun overlevet i arabiske eller latinske oversættelser. De 'gode historier' om ham er derimod fortalt af flere antikke forfattere og med videnskabshistoriens forkærlighed for geniet og den heldige opdagelse. I sidste ende går de formentlig tilbage til en nu tabt Archimedes-biografi, som blev skrevet af matematikeren Herakleides, der levede samtidig med og lidt efter mesteren.

De bedste introduktioner til Archimedes er stadig: T.L. Heath: *The Works of Archimedes* (Cambridge 1897), T.L. Heath: *Greek Mathematical Works* I-II (Oxford 1912), H.G. Zeuthen: *Mathematikens Historie* (rev. O. Neugebauer, København 1949), E.J. Dijsterhuis: *Archimedes* (København 1956). Et godt udvalg af Archimedes' skrifter findes i en dobbeltsproget udgave i Ivor Thomas: *Greek Mathematical Works* I-II (London 1939, LOEB). Hans samlede værker er udgivet med en latinsk paralleloversættelse af J.L. Heiberg (Leipzig 1910-1915).

1. Tekster af Archimedes

1.1 Vægtstangsreglen[2]

Axiomer

1. Vi forudsætter [uden bevis]

[1a]

at lige store byrder i lige lange afstande er i ligevægt og

[1b]

at lige store byrder i ulige lange afstande ikke er i ligevægt, men hælder til byrden i den længste afstand.

2. Hvis [to] byrder er i ligevægt i nogle {nemlig to} afstande, og der lægges noget til den ene byrde, er de ikke i ligevægt, men hælder til den byrde der blev lagt noget til.

3. og ligeledes, hvis der tages noget fra den ene byrde, er de ikke i ligevægt, men hælder til den byrde der ikke blev taget noget fra.

4. Når lige store og ligedannede plane figurer kan dække hinanden, dækker også deres tyngdepunkter hinanden.

Og i ulige store, men ligedannede, [plane figurer] vil tyngdepunkterne være ligedan beliggende.

"Ligedan beliggende i ligedannede figurer" siger vi om de punkter hvorfra rette linjer, trukket til lige store vinkler[s spidser] danner lige store vinkler med [figurens] ensliggende sider.

6. Hvis [to] størrelser er i ligevægt i nogle afstande, vil også størrelser som er ligeså store som dem, være i ligevægt i de samme afstande.

7. I enhver figur hvis omkreds er konveks, må tyngdepunktet ligge inden i figuren.

---

2. *De planorum aequilibriis* I Deff. + Propos. 1-7.

Med disse forudsætninger [kan vi nu vise]:

Sætning 1.

Byrder som er i ligevægt i lige lange afstande, er lige store.

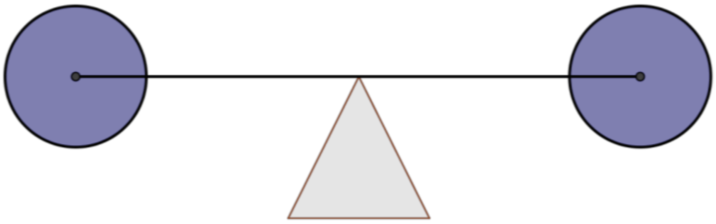


Fig.1

Thi hvis de ikke er lige store, og der fra den største borttages dens overskud, så vil resterne ikke være i ligevægt, fordi der fra byrder i ligevægt er fjernet noget fra den ene byrde [axiom 3, men det strider mod axiom 1]. Altså er byrder som er i ligevægt i lige lange afstande, lige store.

Sætning 2.

Ulige store byrder i lige lange afstande er ikke i ligevægt, men hælder til den største byrde[s side].

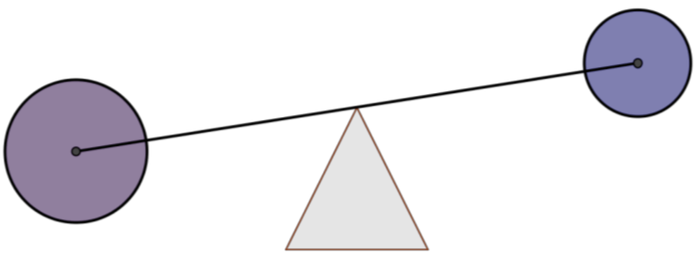


Fig.2

Thi når man borttager overskuddet [fra den største byrde], vil de være i ligevægt, eftersom lige store byrder er i ligevægt i lige lange afstande [axiom1]. Hvis man da tilføjer det borttagne [til den byrde det blev taget fra], vil [systemet] hælde mod den største, fordi der er lagt noget til den ene af to byrder i ligevægt [axiom 2].

Sætning 3.

[Hvis] ulige store byrder i ulige lange afstande er i ligevægt, [er] den største byrde i den korteste afstand.

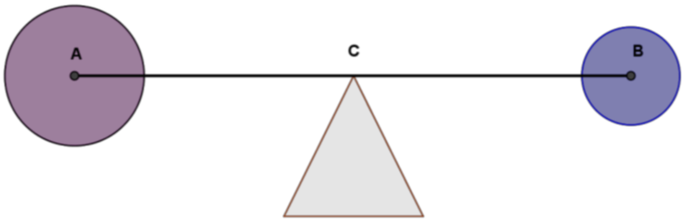


Fig.3

Lad de ulige store byrder være A og B, og lad A være størst, og antag at de er i ligevægt i afstanden AC og CB. Det skal vises at AC er mindre end CB.

Antag nemlig at AC ikke er mindre. Hvis da det overskud hvormed A overgår B, borttages, vil [systemet] hælde mod B fordi der fra byrder i ligevægt er fjernet noget fra den ene byrde [axiom 3]. Men det vil ikke hælde; for hvis CA er lig med CB, vil de være i ligevægt [axiom 1], og hvis CA er større end CB, vil [systemet] hælde mod A, fordi lige store [byrder] ikke er i ligevægt i ulige lange afstande, men hælder til den byrde der hænger i den længste afstand. Af den grund er AC mindre end CB.

Det er også åbenbart at byrder der er i ligevægt i ulige lange afstande, er ulige store, og at den i den korteste afstand er størst.

Sætning 4.

Hvis to lige store størrelser ikke har det samme tyngdepunkt, vil den af de to sammensatte størrelsers tyngdepunkt være midtpunktet af den rette linje der forbinder de to størrelsers tyngdepunkt.

Lad nemlig [størrelsen] A's tyngdepunkt være [punkt] A, og B's B, og lad forbindelseslinjen AB være halveret i C. Jeg påstår at tyngdepunktet i den størrelse der er sammensat af de to størrelser, er C.

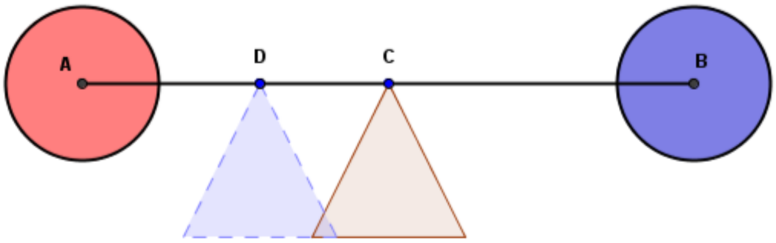


Fig.2

For hvis ikke, så lad om muligt tyngdepunktet være D. Fordi nu D er tyngdepunkt for den af A og B sammenlagte størrelse, er den i ligevægt hvis D understøttes. Altså er størrelserne A og B i ligevægt i afstandene AD og DB, hvilket er umuligt (for lige store størrelser er ikke i ligevægt i ulige lange afstande). Det er altså klart at C er tyngdepunkt for den af A og B sammenlagte størrelse.

Sætning 5.

Hvis tre størrelsers tyngdepunkter ligger på en ret linje, og størrelserne har samme vægt, og linjestykkerne mellem størrelserne er lige store, så vil den af dem alle [tre] sammensatte størrelses tyngdepunkt være det punkt der også er tyngdepunkt i den midterste størrelse.

Lad A, B og C være de tre størrelser, og lad punkterne A, B og C være deres tyngdepunkter, som ligger på en ret linje, og lad såvel [størrelserne] A, B og C som afstandene AC og CB være lige store; jeg påstår at den af alle størrelserne sammensatte størrelses tyngdepunkt er punktet C.

For eftersom størrelserne A og B har samme vægt, vil deres [fælles] tyngdepunkt være punktet C, fordi [linjestykkerne] AC og CB er lige store. Og [størrelsen] C's tyngdepunkt er også punktet C; det er altså klart at den af alle størrelserne sammensatte størrelses tyngdepunkt er det punkt som også er den midterste størrelses tyngdepunkt.

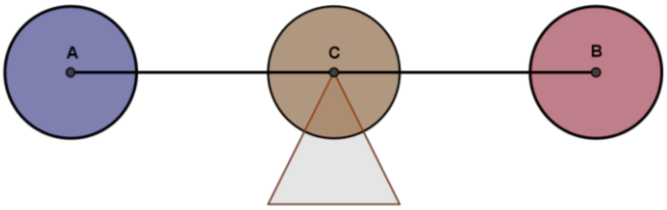


Fig.3

Følgesætning 5A

Som følge heraf er det klart at hvis et vilkårligt ulige antal størrelsers tyngdepunkter ligger på en ret linje, og hvis de størrelser der ligger lige langt fra den midterste har samme vægt, og hvis linjestykkerne mellem deres tyngdepunkter er lige store, så vil den af alle størrelserne sammensatte størrelses tyngdepunkt være det punkt som også er den midterste størrelses tyngdepunkt.

Følgesætning 5B

Men også hvis størrelserne er et lige antal, og hvis deres tyngdepunkter ligger på en ret linje, og hvis både de [to] midterste størrelser og de størrelser der ligger lige langt fra dem, har [parvis] samme vægt, og hvis linjestykkerne mellem deres tyngdepunkter er lige store, så vil den af alle størrelserne sammensatte størrelses tyngdepunkt være midtpunktet af den rette linje der forbinder størrelsernes tyngdepunkter, således som figuren viser.

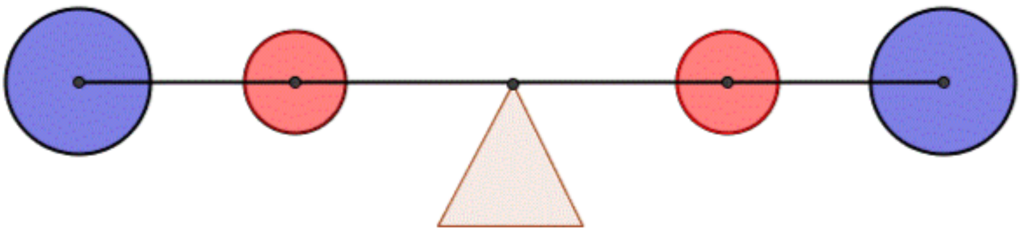


Fig.4

Sætning 6.

Kommensurable størrelser er i ligevægt i afstande der er omvendt proportionale med deres vægte.

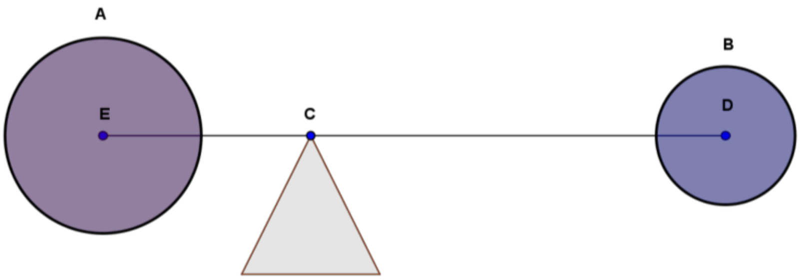


Fig.5

Lad A og B være kommensurable størrelser hvis tyngdepunkter er A og B, og lad ED være en længde, og som A forholder sig til B, således skal længden DC forholde sig til længden CE. Det skal bevises {bemærk: ikke "jeg påstår" som altid hos Euklid} at tyngdepunktet i den størrelse der er sammensat af de to størrelser A og B, er [punktet] C.

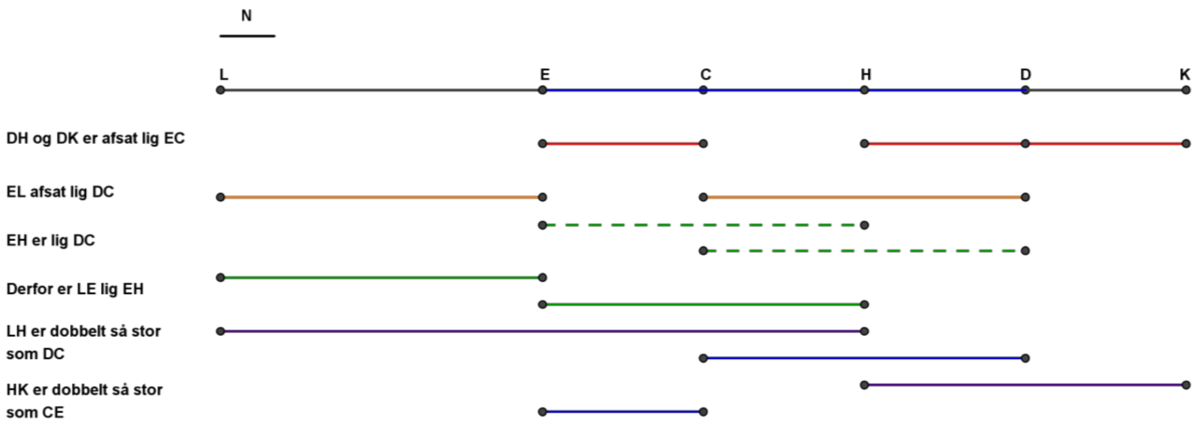


Fig.6

For eftersom DC forholder sig til CE som A til B, og A er kommensurabel med B, så er også CD kommensurabel med CE, dvs et linjestykke med et linjestykke. Altså har EC og CD et fælles mål. Lad det være N; og lad hvert af linjestykkerne DH og DK være afsat lig med EC, og EL lig med DC.

Og da DH er lig med CE, så er også DC lig med EH, og derfor LE lig med EH. Altså er LH dobbelt så stor som DC, og HK dobbelt så stor som CE, og derfor måler N både LH og HK, eftersom det måler deres halvdele. Og da DC forholder sig til CE som A til B, så forholder også LH til HK som DC til CE, for begge er det dobbelte af begge. Og derfor forholder også LH sig til HK som A til B.

{Nu introduceres et fælles mål for A og B, nemlig Z}.

Lad nu A være samme multiplum af Z som LH af N; altså forholder A sig til Z som LH til N. Men det gælder også at B forholder sig til A som KH til LH; følgelig forholder B sig på samme måde til Z som KH til N; altså er B samme multiplum af Z som KH af N. Men også A vistes at være et multiplum af Z, så at Z er et fælles mål for A og B. Hvis nu LH deles i stykker lig med N og A i stykker lig med Z, så vil antallet af de ligestore stykker i LH være det samme som antallet af stykker i A som er lig med Z. Hvis man derfor på hvert af stykkerne i LH anbringer en størrelse lig med Z med tyngdepunkt i stykkets midtpunkt, så vil summen af størrelserne være lig med A, og tyngdepunktet i deres forenede [størrelse] vil være E; thi deres antal er lige, og der er lige mange på hver side af E fordi LE er lig med HE.

På samme måde kan det vises at hvis man på hvert af stykkerne i KH anbringer en størrelse lig med Z med tyngdepunkt i stykkets midtpunkt, så vil summen af størrelserne være lig med B, og tyngdepunktet i deres forenede [størrelse] vil være D; følgelig vil A være anbragt i E og B i D. Der foreligger da et lige antal størrelser lig hinanden og anbragt på en ret linje således at deres tyngdepunkter har samme afstand fra hinanden; følgelig er det åbenbart at tyngdepunktet i den størrelse der er sammensat af dem alle, må være midtpunktet af den rette linje der forbinder de to midterstes tyngdepunkter. Men eftersom LE er lig med CD og EC er lig med DK, så er også hele LC lig med CK, så at tyngdepunktet i den af dem alle sammensatte størrelse er punktet C.

Ergo vil A anbragt i E og B anbragt i D være i ligevægt omkring punkt C.

Sætning 7.

Men også hvis størrelserne er inkommensurable, vil de være i ligevægt i afstande der er omvendt proportionale med størrelserne.

Lad de inkommensurable størrelser være AB og C, og afstandene DE og EZ, og lad AB have samme forhold til C som ED til EZ. Jeg påstår at tyngdepunktet i den af AB og C sammensatte størrelse er E.

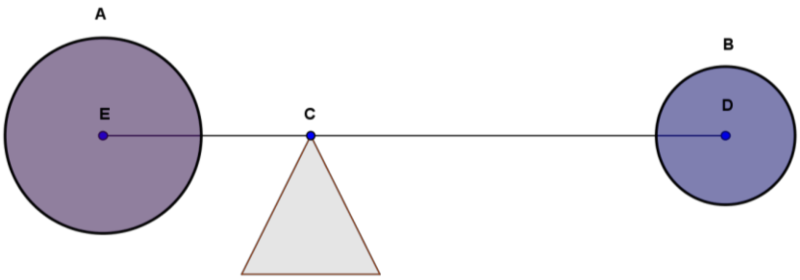


Fig.7

Thi hvis ikke AB anbragt i Z er i ligevægt med C anbragt i D, så er AB enten for stor til at være i ligevægt med C eller ikke. Lad den være større, og lad der fra AB være borttaget [B] mindre end det overskud hvormed AB er for stor til at være i ligevægt med C, [men] sådan at resten A er kommensurabel med C.

Eftersom nu A og C er kommensurable, og A har et mindre forhold til C end DE til EZ, så vil A og C ikke være i ligevægt i afstandene DE og EZ når A anbringes i [punkt] Z og C i [punkt] D.

Af samme grunde heller ikke hvis [det er] C [der] er for stor til at være i ligevægt med AB.

1.2 Cirklens måling

Indledning

Den lille bog om cirkelmåling beskæftiger sig med forholdet mellem en cirkels omkreds og diameter.

Den består af tre sætninger, hvoraf de to sidste i håndskrifttraditionen tydeligvis har byttet plads; i oversættelsen er rækkefølgen derfor ført tilbage til den oprindelige: 1, 3, 2. Den danske filolog og matematiker J.L. Heiberg, der udgav Archimedes' værker, mener, at teksten i sin nuværende form er blevet maltrakteret af en eller flere uvidende afskrivere. Det er nok rigtigt, men man må ikke se bort fra, at Archimedes - ligesom andre store videnskabsmænd - ikke skriver skolebøger og ikke som Euklid anfører alle skridt i en beviskæde, hvis de er indlysende for en velforberedt læser. Heiberg indsætter flere steder i sin latinske oversættelse de mellemregninger, som efter hans opfattelse er gået tabt. Vi har fulgt samme praksis og anført det manglende i [...] uden at tage stilling til, hvem udeladelserne skyldes. Spalten til højre for selve oversættelsen bruges til noter. Et nærmere studium af bogen om cirkelmåling måtte i øvrigt også omfatte et studium (og oversættelse) af Eutokios' kommentar fra midten af 500-tallet, også udgivet af Heiberg. I Heibergs udgave er der i alt fem figurer. Vi har (inspireret af *QED*) udvidet figurantallet, tilføjet skraveringer og farver for at gøre dem lettere forståelige og sådan, at argumentationen kan læses trinvis, næsten som i en tegneserie.

Den *første* sætning beviser, at arealet af en cirkel er lig med arealet af en retvinklet trekant, hvis ene katete er lig med cirklens radius og anden katete er lig med cirklens omkreds. Beviset bygger i overvejende grad på det, der senere har fået betegnelsen Archimedes' aksiom, men som allerede findes i Euklids *Elementer* V, definition 4: 'Størrelser siges at have et forhold til hinanden, når de ved at multipliceres kan overgå hinanden.' Herpå bygger ekshaustionsprincippet ('udtømningsprincippet'), som Archimedes flittigt benytter.

Den *anden* sætning (= 3.) beviser, at i enhver cirkel er omkredsen i forhold til diameteren lidt større end 3 10/71 men mindre end 3 1/7. Heraf kommer den tilnærmelse af π, som var den almindelige indtil lommeregnerens decimaltal. I det meget elegante bevis ser man Archimedes udfolde sine talenter som matematiker (og hans noget hurtige fremgangsmåde). I forholdsberegningerne indgår uden nogen nærmere forklaring tallene 153 og 780 som udgangspunkt for en række beregninger. Hvor disse tal stammer fra, har CMT redegjort for i en note, der findes i appendix. Man lægger også mærke til Archimedes' lidt unøjagtige brug af ordet 'lig med', der sommetider har den præcise matematiske betydning, andre gange svarer til 'omtrent lig med', dvs. med en ubetydelig afvigelse eller en tilnærmet værdi.

Den *tredje* sætning (=2.) beviser, at forholdet mellem en cirkel og det omskrevne kvadrat er som 11:14, når 3 1/7 bruges som tilnærmelse til π.

Archimedes bruger intet særligt navn for forholdet mellem omkreds og diameter, og først i begyndelsen af 1700-tallet blev det almindeligt at kalde det π.

Sætning 1
Enhver cirkel er lig med en retvinklet trekant, hvis dens radius er lig med den ene af linjerne ved trekantens rette vinkel og dens omkreds er lig med grundlinjen.
Lad cirklen ABCD forholde sig til trekanten E som forudsat; jeg siger at cirklen er lig med trekanten. (Fig.1)

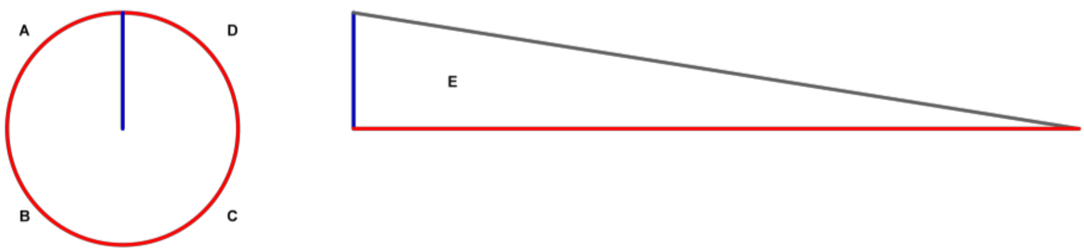


Fig.1

Lad om muligt cirklen være størst og lad kvadratet AC være indskrevet (fig.2) og cirkelbuerne [AB, BC, CD og DA] være delt i to

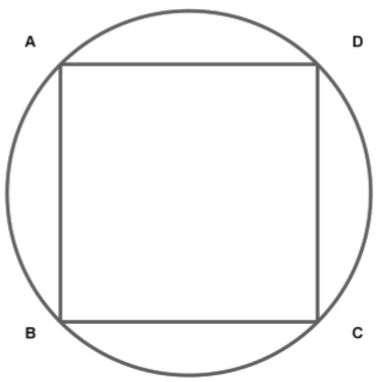


Fig.2

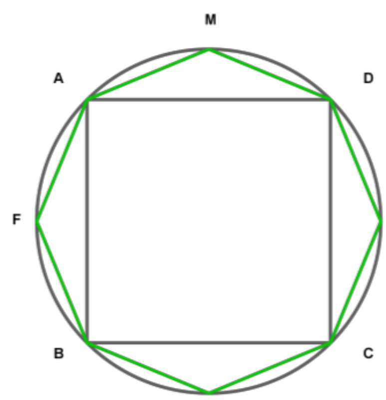


Fig.3

[og lad linjestykkerne BF, FA, AM, MD osv. være trukket][1] (fig.3), og lad nu delene være mindre end det overskud (fig.4), hvormed cirklen overstiger trekanten[2]. Den retlinede figur er altså endnu større end trekanten. Lad N være taget som centrum og NO som vinkelret [på AF] (fig.5). Altså er NO mindre end trekantens side[3].

[1]Her benytter Archimedes ekshaustionsmetoden første gang.

[2]At dette er muligt følger af Euklids *Elementer* XII,2 (som afhænger af X,1)

[3]Altså den side af trekanten E der er lig med cirklens radius.

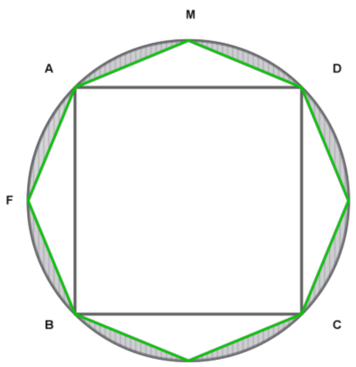


Fig.4

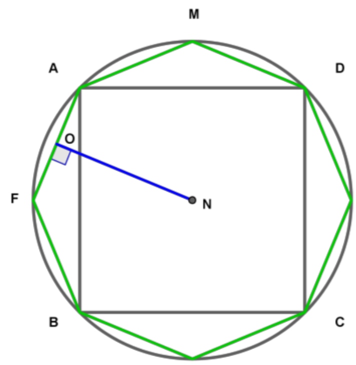


Fig.5

Men omkredsen af den retlinede figur er mindre end den anden [side i trekanten E], fordi [den er mindre end] cirklens omkreds. Altså er den retlinede figur mindre end trekanten E. Hvilket er absurd.

Lad om muligt cirklen være mindre end trekanten E og lad kvadratet være omskrevet og cirkelbuerne være delt i to og lad tangenterne være trukket gennem punkterne (fig.6). Altså er vinklen PAR ret.

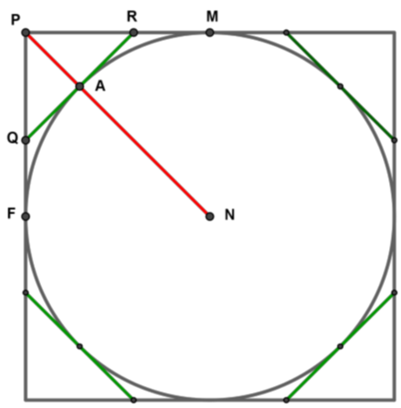


Fig.6

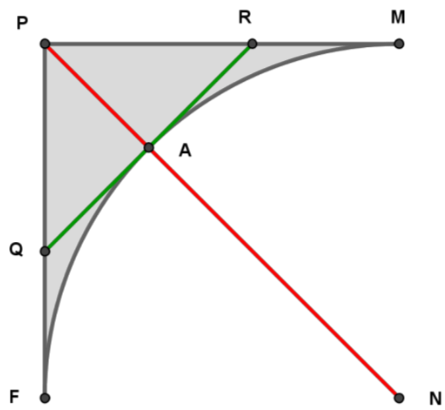


Fig.7

Derfor er linjen PR større end linjen RM, MR er nemlig lig med RA og trekanten RPQ er derfor større end halvdelen af figuren PFAM (fig.7).[4] Lad de udsnit der svarer til QFA være trukket fra [indtil] de bliver mindre end det overskud hvormed trekanten E overstiger cirklen ABCD (fig.8).[5] Altså er den omskrevne retlinede figur endnu mindre end trekanten E. Hvilket er absurd.

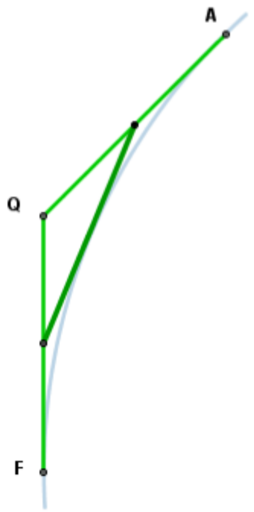


Fig.8

For den retlinede figur er større, fordi linjen NA er lig med trekantens vinkelrette side, og omkredsen er større end trekantens grundlinje. Altså er cirklen lig med trekanten E.[6]

Sætning 3

Omkredsen af enhver cirkel er det tredobbelte af diameteren, og overstiger den endvidere med mindre end en syvende del af diameteren og med mere end ti enoghalvfjerdssenstyvende dele [af diameteren].[7]

[4]Trekanten PAR er større end trekanten RAM da de har samme højde og grundlinjen PR er større end grundlinjen RM. Derfor er trekanten PAR større end figuren RAM (med cirkelbuen). Herpå bygger Archimedes' argument.

[5]Dvs. processen tænkes at fortsætte indtil forskellen mellem den omskrevne polygon og cirklen (det mørke på fig.8) bliver mindre end den antagne forskel mellem trekanten og cirklen. At dette kan lade sig gøre følger af Archimedes' aksiom som er det samme som Euklids *Elementer* X,1.

[6]At dette er den eneste mulighed følger af at Archimedes i de to modstridsargumenter har vist, at trekanten hverken kan være større end eller mindre end cirklen.

[7] Dvs. for omkredsen O og diameteren d er $\left(3+\frac{10}{71}\right)\cdot d < O < \left(3+\frac{1}{7}\right)\cdot d$

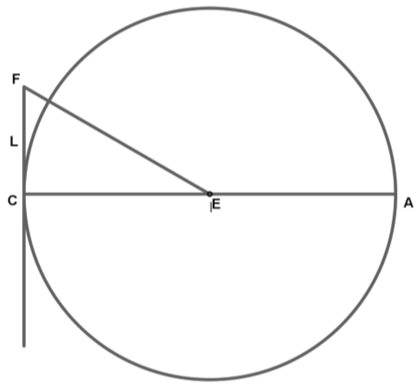


Fig.9

Lad der være givet en cirkel og linjen AC som diameter, centrum E, tangenten CLF og vinklen FEC, som er en tredjedel af en ret (fig.9). Altså har EF forholdet til FC som 306 til 153 (dvs. $\frac{EF}{FC} = \frac{306}{153}$) og EC har forholdet til CF som 265 til 153 (dvs. $\frac{EC}{CF} = \frac{265}{153}$).[8] Lad så vinklen FEC være delt i to af linjen EG (fig.11).

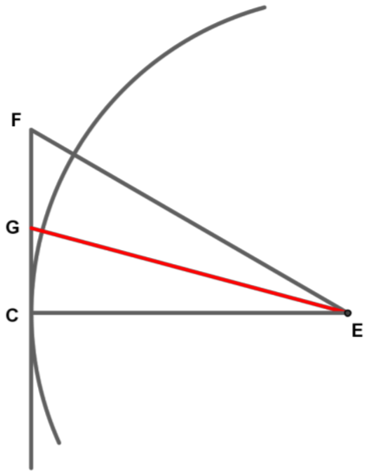


Fig.11

[8]Da trekanten EFC er en 30-60-90-trekant, er hypotenusen dobbelt så lang som den korte katete. Deles nemlig en 30-60-90-trekant op i to af den røde linje (som deler den rette vinkel i to vinkler på 30 og 60 grader, se Fig.10), således at der fremkommer en ligesidet trekant (blå) og en ligebenet trekant (grøn), er det klart at hypotenusen er dobbelt så lang som den korte katete.

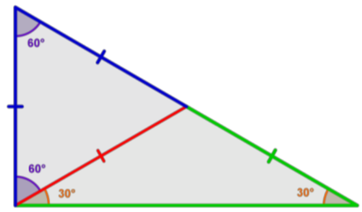


Fig.10

Udnyttes Pythagoras' sætning på 30-60-90-trekanten fås

$$FE^2 = CE^2 + CF^2 \Leftrightarrow$$

$$(2 \cdot CF)^2 = CE^2 + CF^2 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot CF - CF^2 = CE^2 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot CF^2 = CE^2 \Leftrightarrow$$

$$CE = \sqrt{3}CF$$

Nu er Så når Archimedes bruger 265 er det en tilnærmelse, om end meget tæt på den faktiske værdi. I det følgende anvender Archimedes flere tilnærmede værdier, her i den første del af beviset er alle tilnærmede værdier mindre end de faktiske decimaltal som vi ville bruge i dag. Dette gør at uligheden i sætningen overholdes.

Altså er FE i forhold til EC som FG i forhold til GC (dvs. $\frac{FE}{EC}=\frac{FG}{GC}$).[9] Altså er FE og EC til sammen i forhold til FC som EC i forhold til CG (dvs. $\frac{FE+EC}{FC}=\frac{CE}{CG}$).[10] Derfor har linjen CE et større forhold til CG end 571 til 153 (dvs. $\frac{CE}{CG}>\frac{571}{153}$). Altså har linjen EG forholdet til GC ved kvadratet som 349450 i forhold til 23409 (dvs. $\frac{EG^2}{GC^2}=\frac{349450}{23409}$),[11] og som side samme forhold som $591\frac{1}{8}$ i forhold til 153 (dvs. $\frac{EG}{GC}=\frac{591\frac{1}{8}}{153}$).[12] Igen, lad vinklen GEC være delt i to af EH (fig.12); af samme årsag har EC i forhold til CH altså et forhold større end 1162 i forhold til 153 (dvs. $\frac{EC}{CH}=\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$).[13]

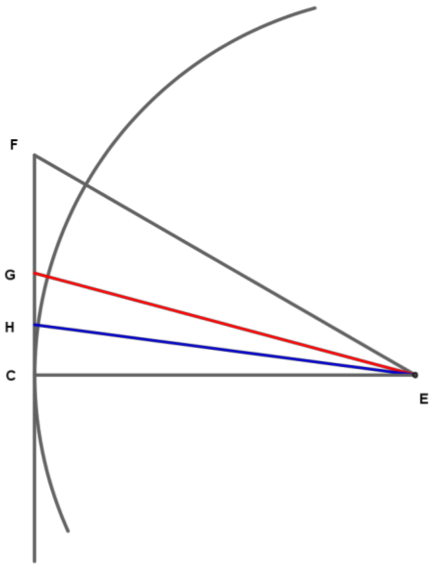


Fig.12

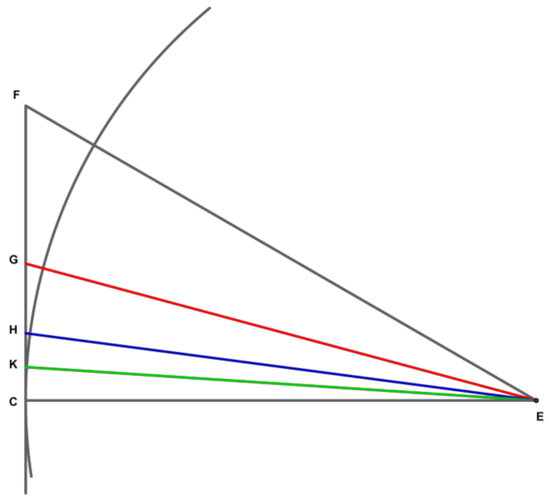


Fig.13

Så har HE et forhold til HC større end $1172\frac{1}{8}$ i forhold til 153 (dvs. $\frac{HE}{HC}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$).[14] Lad videre vinklen HEC være delt i to af EK (fig.13). Så har EC et forhold til CK større end $2334\frac{1}{4}$ i forhold til 153 (dvs. $\frac{EC}{CK}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}$). Så har EK et forhold til CK større end $2334\frac{1}{4}$ i forhold til 153 (dvs. $\frac{EK}{CK}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153}$). Lad videre vinklen KEC være delt i to af LE (fig.14). Så har EC et forhold til LC større end forholdet $4673\frac{1}{2}$ til 153 (dvs. $\frac{EC}{LC}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$).

[9] Dette følger af Euklid VI,3.

[10] Dette følger af at

$$\frac{FE}{EC}=\frac{FG}{GC}\Leftrightarrow$$
$$\frac{FE}{EC}+1=\frac{FG}{GC}+1\Leftrightarrow$$
$$\frac{FE}{EC}+\frac{EC}{EC}=\frac{FG}{GC}+\frac{GC}{GC}\Leftrightarrow$$
$$\frac{FE+EC}{EC}=\frac{FC}{GC}\Leftrightarrow$$
$$\frac{FE+EC}{FC}=\frac{EC}{GC}$$

[11] Her bruger Archimedes Pythagoras' sætning:

$$\frac{EG^2}{GC^2}=\frac{EC^2+CG^2}{GC^2}$$
$$=\frac{571^2+153^2}{153^2}=\frac{349450}{23409}$$

[12] Her er $591\frac{1}{8}=591{,}125$ mens

$\sqrt{349450}=591{,}12296\ldots$.

[13] Her følger et argument helt analogt med det foregående (se note 10). Tallet $1162\frac{1}{8}$ fås af $571+591{,}125$.

[14] Her følger et argument helt analogt med det foregående (se note 11). Tallet $1172\frac{1}{8}$ approximeres fra

$$153^2\left(1163\tfrac{1}{8}\right)=$$
$$23409+1350534{,}5156\ldots=$$
$$1373943{,}5156=$$
$$\sqrt{1373943{,}5156}=1172{,}1533\ldots$$

Her er

$$1172\tfrac{1}{8}<1172{,}1533\ldots$$

Her er altså argumentet fra trekant CEG gentaget for trekant CEH. På lignende måde gentages argumentet for trekanterne CEK og CEL herefter.

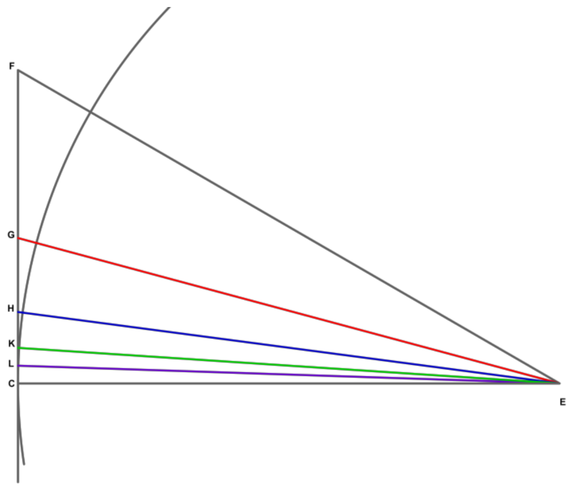


Fig.14

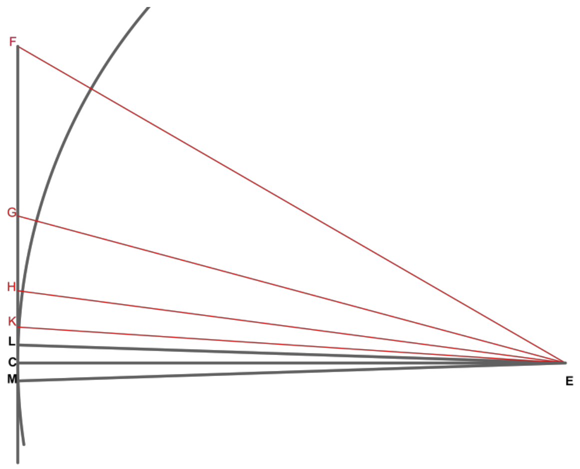


Fig.15

Da altså vinklen FEC, som er en tredjedel af en ret, er delt i to fire gange, er vinklen LEC $\frac{1}{48}$ af en ret. Lad så vinklen CEM være lagt ved E lig med denne.[15] Altså er vinklen LEM $\frac{1}{24}$ af en ret. Og den rette linje LM er side i den polygon rundt om cirklen, som har 96 sider. Da altså EC er bevist at have et større forhold til CL end $4673\frac{1}{2}$ i forhold til 153, men AC er det dobbelte af EC og LM er det dobbelte af CL, og altså har AC et forhold til 96-kantens omkreds som er større end $4673\frac{1}{2}$ i forhold til 14688.[16] Omkredsen er tre gange større plus $667\frac{1}{2}$, som er mindre end en syvendedel af $4673\frac{1}{2}$.[17] Derfor er [omkredsen af] polygonen rundt om cirklen tre gange og mindre end en syvendedel større end diameteren. Altså er cirklens omkreds langt mindre end tre gange og en syvende del større.

Lad der være givet en cirkel og diameteren AC og vinklen BAC som er en tredjedel af en ret (fig.16). Så har AB et mindre forhold til BC end 1351 har i forhold til 780 (dvs. $\frac{AB}{BC} < \frac{1351}{780}$)[18] [og AC i forhold til CB som 1560 i forhold til 780] (dvs. $\frac{AC}{BC} = \frac{1560}{780}$). [Lad] vinklen BAC [være] delt i to af AF (fig.17), da vinkel BAF er lig med vinkel FCB, men også lig med FAC, så er også vinkel FCB lig med FAC.[19]

[15] altså lig med vinklen LEC, se fig.15.

[16] $14688 = 96 \cdot 153$.

[17] $3 \cdot (4673 + \frac{1}{2}) + 667\frac{1}{2} = 14688$

[18] Vi har igen en 30-60-90-trekant så

$$AB = \sqrt{3} \cdot BC$$

$$= \sqrt{3} \cdot 780$$

$$= 1350,99963\ldots$$

Og
$AC = 2 \cdot BC = 2 \cdot 780 = 1560$

[19] I en cirkel er periferivinkler der spænder over den samme cirklebue lige store. Derfor er vinklerne BAF og BCF lige store. Men vinkel BAF er lig med vinkel FAC og derfor er vinklerne FAC og FCB lige store (se fig.18).

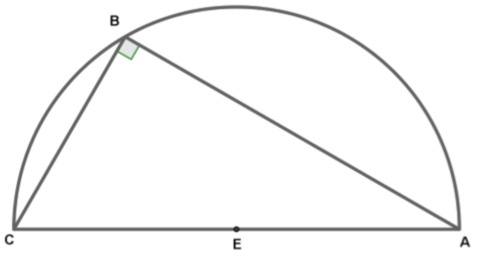


Fig.16

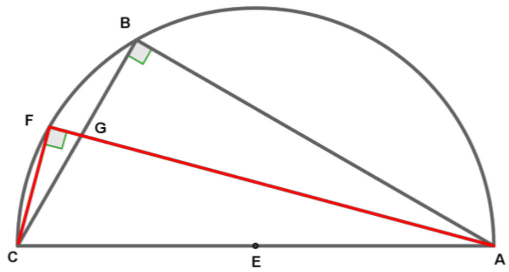


Fig.17

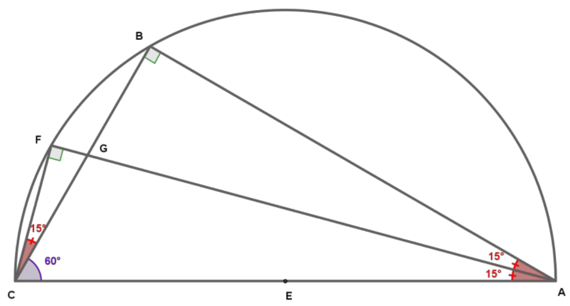


Fig.18

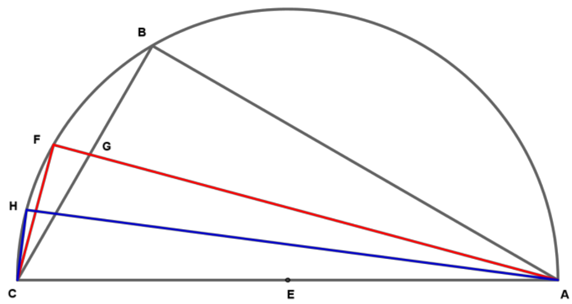


Fig.19

Og den rette vinkel AFC er fælles. Og den tredje vinkel FGC er lig med den tredje vinkel ACF. Altså er trekanten AFC ensvinklet med trekanten CFG. Altså, ligesom AF forholder sig til FC, sådan forholder CF sig til FG og AC til CG (dvs. $\frac{AF}{FC} = \frac{CF}{FG} = \frac{AG}{CG}$). Men ligesom AC forholder sig til CG forholder også CA plus AB sig til BC (dvs. $\frac{AC}{CG} = \frac{CA+AB}{BC}$).[20] Og altså ligesom BA+AC forholder sig til BC således forholder AF sig til FC (dvs. $\frac{BA+AC}{BC} = \frac{AF}{FC}$). Derfor har AF altså et mindre forhold til FC end 2911 har til 780 (dvs. $\frac{AF}{FC} < \frac{2911}{780}$)[21] og AC har et mindre forhold til CF end $3013\frac{3}{4}$ har til 780 (dvs. $\frac{AC}{CF} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$). Lad nu vinkel CAF være del i to af AH (fig.19).

[20]Dette følger af Euklid VI,3:

$\frac{CG}{BG} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow$

$\frac{CG}{BG} + 1 = \frac{AC}{AB} + 1 \Leftrightarrow$

$\frac{CG}{BG} + \frac{BG}{BG} = \frac{AC}{AB} + \frac{AB}{AB} \Leftrightarrow$

$\frac{CG+BG}{BG} = \frac{AC+AB}{AB} \Leftrightarrow$

$\frac{BC}{BG} = \frac{AC+AB}{BC} \Leftrightarrow$

$\frac{AC}{CG} = \frac{AC+AB}{BC}$

Hvor Euklid VI,3 bruges igen i sidste omskrivning.

[21] Her er $AC+AB=$ 1560+1351=2911

Herefter følger beregninger med Pythagoras' sætning som i første del af beviset:

$\sqrt{2911^2 + 780^2} = 3013,688\ldots$

Archimedes approximerer altså med et tal der er en anelse større end det tal Pythagoras' sætning giver. Det samme gælder de approximationer der følger i resten af beviset.

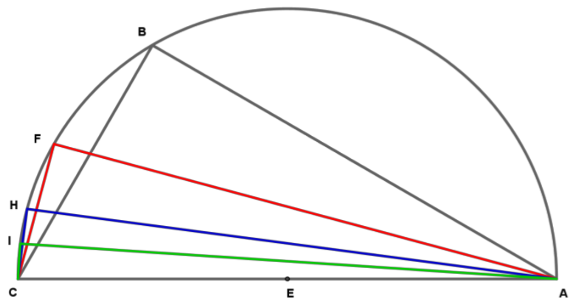


Fig.20

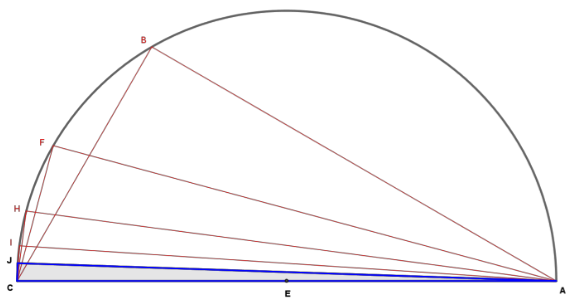


Fig.21

Altså af samme grund[22] har AH et mindre forhold til HC end $5924\frac{3}{4}$ har til 780 (dvs. $\frac{AH}{HC} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780}$) eller som 1823 til 240. For den ene er $\frac{4}{13}$ af den anden[23]. Derfor[24] er AC i forhold til CH mindre end $1838\frac{9}{11}$ i forhold til 240 (dvs. $\frac{AC}{CH} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$). Lad endvidere vinkel HAC være delt i to af IA (fig.20); og IA har altså et mindre forhold til IC end 1007 har til 66 (dvs. $\frac{IA}{IC} < \frac{1007}{66}$) den ene er nemlig $\frac{11}{40}$ af den anden.[25] Altså er AC i forhold til IC mindre end forholdet mellem $1009\frac{1}{6}$ og 66 (dvs. $\frac{AC}{IC} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$).[26] Lad endvidere vinkel IAC være delt i to af JA (fig. 21); AJ har altså et mindre forhold til JC end $2016\frac{1}{6}$ har til 66 (dvs. $\frac{AJ}{JC} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$)[27] og AC har et mindre forhold til CJ end $2017\frac{1}{6}$ har til 66 (dvs. $\frac{AC}{CJ} < \frac{2017\frac{1}{6}}{66}$).[28]
Omvendt har altså omkredsen af polygonen et større forhold til diameteren end 6336 har til $2017\frac{1}{6}$ (dvs. $\frac{omkreds}{diameter} < \frac{6336}{2017\frac{1}{6}}$), hvilket er $3\frac{10}{71}$ gange større end $2017\frac{1}{6}$ (dvs. $6336 > 3\frac{10}{71}\cdot 2017\frac{1}{4} \approx 6335{,}9$). Og den indskrevne 96-kants omkreds er altså $3\frac{10}{71}$ gange større end diameteren. Altså er cirklen endnu mere end $3\frac{10}{71}$ gange større. Altså er cirklens omkreds tre gange større og lidt mere end en $\frac{1}{7}$ mindre end diameteren, men større end $\frac{10}{71}$.

Sætning 2
Cirklen har et forhold til kvadratet på diameteren som 11 til 14.

[22] Nu følger et argument for trekanten CHA som er helt analogt med argumentet for trekanten CFA. Tilsvarende argumentation følger herefter for trekanterne CIA og CJA.

[23] $5924\frac{3}{4} = 3013\frac{3}{4} + 2911$ og $\frac{(5924\frac{3}{4})\cdot\frac{4}{13}}{780\cdot\frac{4}{13}} = \frac{1823}{240}$

[24] Da $\sqrt{1823^2 + 240^2} = 1838,730\ldots$

[25] Dvs. $\frac{IA}{IC} < \frac{(1823+1838\frac{9}{11})\cdot\frac{11}{40}}{240\cdot\frac{11}{40}} = \frac{1007}{66}$

[26] Her er $\sqrt{1007^2 + 66^2} = 1009,1605\ldots$

[27] $2016\frac{1}{6} = 1007 + 1009\frac{1}{6}$

[28] $\sqrt{2016\frac{1}{6}^2 + 66^2} = 2017,2466\ldots$

$6336 = 96\cdot 66$

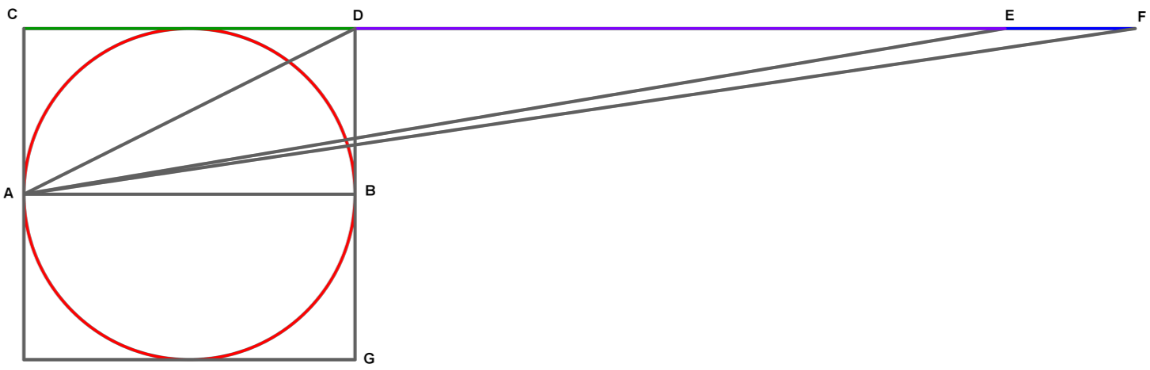


Fig.22

Lad der være en cirkel hvis diamenter er AB og lad der være omskrevet et kvadrat CG og lad DE være dobbelt så stor som CD og lad EF være $\frac{1}{7}$ gange så stor som CD (se fig.22). Da nu altså trekanten ACE har samme forhold til trekanten ACD som 21 har til 7, mens trekanten ACD har samme forhold til AEF som 7 til 1, så forholder ACF sig til ACD som 22 til 7, men kvadratet CG er fire gange så stort som ACD og trekanten ACDF er lig med cirklen AB. Altså har cirklen et forhold til kvadratet CG som 11 har til 14.[30]

[29] Bruger Euklid VI,1.

[30] Bruger trekant ACF som cirklens areal jf. sætning 1 og 3. Altså bruges $\frac{22}{7}$ som approximation til π.

Appendix til Cirklens måling

Archimedes' tilnærmelser til √3

I en verden uden lommeregnere er det nyttigt at kunne regne med brøker, men selv for en gammel brøkregner er det forbavsende at se Archimedes ryste et par uventede forhold ud af ærmet. I forbindelse med udregningen af cirklens omkreds hævder han uden varsel at længderne af kateterne i en bestemt retvinklet trekant forholder sig som 265 til 153; og senere, at kateterne i en tilsvarende trekant forholder sig som 1351:780.

Heraf udleder han at cirklens omkreds er mindre end 3 + 1/7 diameter, men større end 3 + 10/71 diameter – hvor især den sidste brøk ikke ser særlig indbydende ud.

Som indledning til det lille skrift på i alt tre læresætninger om cirklens udmåling, *κύκλου μέτρησις*, vil vi prøve at rekonstruere en mulig metode til at bestemme disse forhold eller brøker. Det drejer sig om at bestemme forholdet $\sqrt{3}:1$ som et forhold mellem hele tal $y:x$, $y > x$.

Hvorfor det er $\sqrt{3}$, vil fremgå af sætning 3 i Archimedes' værk. Metoden er kendt fra babylonske tekster og fra Herons *Metrika* (*μητρικά*, målelære).

Et eksempel: Bestem en tilnærmelse til $\sqrt{80}$. Nu er 80 "nedre nabo" til et kvadrattal, 9^2, så $80 = 9 \cdot (9 - 1/9)$. Derfor er middeltallet $9 - 1/18$ en første tilnærmelse til $\sqrt{80}$ (og en god en, med en afvigelse på kun 173 ppm). Men $\sqrt{80} = \sqrt{(16 \cdot 5)} = 4\sqrt{5}$, således at vores resultat også kan udtrykkes som
$\sqrt{5} = (9 - 1/18)/4 = 2 + 17/72$.

[note: 2 + 17/72 kan udtrykkes elegant i 60-talssystemet som 2; 14, 10 (2 h 14 m 10 s), en værdi der genfindes hos babylonerne].

Generelt kan metoden beskrives således:
Hvis et helt tal N er "nedre nabo" til et kvadrattal, altså $N = n^2 - 1$, tilnærmes $\sqrt{N}$ med $n - 1/2n$.

Dette kan også indses ved at $(n - 1/2n)^2 = n^2 - 1 + 1/4n^2$, hvor det sidste led er lille i forhold til de to andre. Det går derfor an at bortkaste dette led. Vi lægger mærke til at tilnærmelsen altid er større end den præcise værdi.

Øvelse: Vis at metoden også virker hvis N er "øvre nabo" til et kvadrattal, altså $N = n^2 + 1$, så at $\sqrt{N} \approx n + 1/2n$. Og vis derefter at metoden også kan bruges selvom afstanden mellem N og kvadrattallet er større end 1; men da bliver tilnærmelsen ikke ligeså god.

* * *

Opgaven "at bestemme gode tilnærmelser til $\sqrt{3}$" går da i første omgang ud på at finde et kvadrattal y^2 hvis "nedre nabo" er et kvadrattal gange 3: $y^2-1 = 3x^2$.

Vi finder hurtigt $y = 7$, $x = 4$, $y^2 = 49$, $3x^2 = 48 = y^2 - 1$, hvoraf $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 7 - 1/14$, og derfor $\sqrt{3} \approx (7 - 1/14)/4 = 2 - 15/56 = 97/56$.

Dette ville Archimedes udtrykke som to ligestore forhold (en proportion): $\sqrt{3} : 1 \approx 97 : 56$.
(Vi kan formulere en generel regel om "Nedre nabo-tilnærmelse": $\sqrt{(y^2-1)} \approx 2y^2-1 / 2xy$.)

Næste kvadrattal y^2 som er nabo til et multiplum af $3x^2$ findes ved betragtning af en kvadrattabel:

$y = 26$, $x = 15$, $y^2 = 676$, $3x^2 = 675 = y^2 - 1$, hvoraf $\sqrt{675} = 15\sqrt{3} \approx 26 - 1/52 = 1351/52$, og derfor $15\sqrt{3} : 15 = \sqrt{3} : 1 \approx (26 - 1/52) : 15 = 1351 : 780$ (fordi $15 = 780/52$).

Vi genkender det ene af Archimedes' forhold.

Dette er, som nævnt, på den høje side af $\sqrt{3}$. For at finde en tilnærmelse på den lave side ræsonnerer Archimedes formentlig på følgende måde:

Når $26 - 1/52$ fører til en øvre tilnærmelse, vil 26 minus en større brøk nok give en nedre tilnærmelse. Han forlader her den ovenfor nævnte metode og sætter $\sqrt{675} \approx 26 - 1/51 = 1325/51$.
Og fordi $15 = 765/51$, har han nu forholdet $\sqrt{3} : 1 \approx 1325 : 765$, der forkortes til $265 : 153$.

At dette netop er en nedre tilnærmelse kan efterprøves: $265^2 = 70225$, $3 \cdot 153^2 = 70227$, altså er kvotienten $265^2 / 153^2$ mindre end 3.

Det er klart at operationer med så store brøker giver anledning til et betydeligt regnearbejde. Vi véd ikke så meget om hvordan det udførtes i praksis, men den antikke "regnemaskine" *abacus* (en art kugleramme) har helt sikkert været et meget anvendt hjælpemiddel, formodentlig i flere forskellige udforminger på samme regnebord.

1.3 Archimedes om angivelse af store tal

Indledning

I *Sandregneren* fortager Archimedes et tankeeksperiment, der går ud på at beregne det kugleformede verdensrums størrelse. Han ønsker at beregne rumfanget ved at finde ud af, hvor mange sandskorn der skal til for at fylde verdensrummet ud. Tallet bliver naturligvis astronomisk, og til det brug må han skabe en ny måde at angive store tal på. Det græske talsystem opererer med enere, tiere, hundreder, tusinder og titusinder (*hen-, deka-, hekto-, chilo-, myriad-*), resten udtrykkes som potenser af myriader.

I kapitel 3 fastlægger Archimedes den nye måde at skrive tallene på.

Jeg tror, det kan være nyttigt at tale om benævnelsen af tallene, bl.a. for at de læsere, der ikke er stødt på min bog til Zeuxippos, ikke skal blive forvirrede, fordi der i denne bog indtil videre ikke er sagt noget om benævnelsen. Nu er det sådan, at vi har fået navne på tallene op til en myriade forærende, og over myriaden kan vi tælle myriaderne helt op til en myriade myriader. Lad os nu kalde de her nævnte tal op til en myriade myriader for *første ordens tal*, og lad tallene for en myriade myriader være kaldt enheden for anden ordens tal. Lad tallene i anden orden være tællelige, og lad der af disse enere være dannet tiere, hundreder, tusinder og op til myriader; lad så en myriade myriader af anden ordens tal kaldes enheden for tredje ordens tal, og lad der af disse enere være dannet tiere, hundreder, tusinder og op til myriader. Lad på samme måde en myriade myriader af tredje ordens tal kaldes enheden for fjerde ordens tal og lad så en myriade myriader af fjerde ordens tal kaldes enheden for femte ordens tal og lad tallene gå frem og have navne på samme måde, lige indtil tallene når en myriade myriader ganget med en myriade gange med en myriade.

Det er tilstrækkeligt at kende tallene så langt, men man kan føre dem endnu længere. Lad nemlig nu de omtalte tal kaldes tal af *første periode*. Det sidste tal af den første periode skal nu kaldes enheden i den første ordens tals anden periode. Igen, lad en myriade myriader af den første ordens anden periode kaldes enheden i den anden periodes anden orden. På samme måde kan det sidste tal af dem kaldes enheden i den anden periodes tredje orden - og på den måde kan tallene fortsætte indtil tallene når en myriade myriader ganget en myriade gange en myriade.

Endvidere skal det sidste tal i den anden periode kaldes enhed i den tredjeperiode af første orden, og lad dem således hele tiden skrider frem indtil den myriadegangede periode af den myriadegangede ordens myriadegangede myriade.

Kommentar

Archimedes' beregning vil se således ud i moderne notation:

Tallet 10^4 kaldes en myriade, og det er naturligvis muligt at lægge 1 til så man får

$10^4 + 1$,

og endnu 1 giver

$10^4 + 2$,

osv. På et tidspunkt kommer man til

$10^4 + 10^4 = 2{\cdot}10^4$.

Herefter bliver det

$2{\cdot}10^4+1$,

$2{\cdot}10^4+2$,

osv. indtil vi kommer til

$2{\cdot}10^4+10^4=3{\cdot}10^4$,

og således fortsættes med

$3{\cdot}10^4+10^4=4{\cdot}10^4$,

$5{\cdot}10^4$,

… ,

$1000{\cdot}10^4=10^3{\cdot}10^4$,

…

til

$10^4{\cdot}10^4=10^8$.

I lighed med før kan vi lægge 1 til og får så

10^8+1,

hvorefter det bliver

10^8+2,

10^8+3,

… ,

10^8+10^4,

… ,

$10^8+10^8=2\cdot10^8$.

Senere kommer

$3 \cdot 10^8$,

$4 \cdot 10^8$,

…

$10^4 \cdot 10^8$,

…

$10^8 \cdot 10^8 = (10^8)^2=10^{16}$,

…

$10^8 \cdot 10^8 \cdot 10^8 = (10^8)^3=10^{24}$,

…

$10^8 \cdot 10^8 \cdot 10^8 \cdot 10^8 = (10^8)^4 = 10^{32}$,

…

Systemet er nu at grundenheden ikke er myriaden = 10^4, men derimod 10^8, således at det er potenser af 10^8 som får deres eget navn, nemlig en orden. Vi har her valgt at bruge m som symbol for 10^8. Ordnerne inddeles yderligere i perioder efter nedenstående plan:

Periode	Orden	Omfatter	Notation
1	1	tallene fra og med 1 til og med 10^8	$\mu = 10^8$
	2	tallene fra og med $10^8 + 1$ til og med $(10^8)^2 = 10^{16}$	μ^2
	3	tallene fra og med $10^{16} + 1$ til og med $(10^8)^3 = 10^{24}$	μ^3
	4	tallene fra og med $10^{24} + 1$ til og med $(10^8)^4 = 10^{32}$	μ^4
	5	tallene fra og med $10^{32} + 1$ til og med $(10^8)^5 = 10^{40}$	μ^5
	…	…	…
	10^8	tallene fra og med $\left(10^8\right)^{10^8-1} + 1$ til og med $\left(10^8\right)^{10^8}$	$\varPi = \mu^\mu$
2	1	tallene fra og med $\varPi + 1$ til og med $\varPi \cdot 10^8$	$\varPi \cdot \mu$
	2	tallene fra og med $\varPi \cdot 10^8 + 1$ til og med $\varPi \cdot \left(10^8\right)^2$	$\varPi \cdot \mu^2$
	3	tallene fra og med $\varPi \cdot \left(10^8\right)^2 + 1$ til og med $\varPi \cdot \left(10^8\right)^3$	$\varPi \cdot \mu^3$
	…	…	…
	10^8	tallene fra og med $\varPi \cdot \left(10^8\right)^{10^8-1} + 1$ til og med $\varPi \cdot \left(10^8\right)^{10^8}$	$\varPi \cdot \mu^\mu = \varPi^2$
3	1	…	
	…	…	
	10^8	…	$\varPi^3$
…	1	…	…
	10^8	…	…
10^8	1	…	
	…	…	
	10^8	…	$\varPi^{10^8} = \varPi^\mu$

Mht. Π følger vi her en notation som svarer til den hos Heath. Han bruger *P* men har ikke noget symbol for vores μ.

Ifl. Heath har løsningen på kvægproblemet godt 200000 cifre og kan derfor skrives som et tal mellem 1 og 10 gange $10^{\text{ca } 200000} = 10^{\text{ca } 2 \cdot 10^5}$

I skemaet ovenfor, kan vi se at det største tal i første periode er $\left(10^8\right)^{10^8} = 10^{8 \cdot 10^8}$, altså meget større end antallet af okser på Solgudens marker. Archimedes ville derfor ikke have problemer med at udtrykke selve tallet (endda indenfor første periode).

1.4 Archimedes: Solgudens okser

Indledning

På rejsen hjem fra Troja kommer helten Odysseus ud for mange utrolige ting. Under et ophold hos troldkvinden Kirke advarer hun ham om, at han på sin videre færd vil komme til Trekantøen, Thrinakia, hvor nye farer lurer:

Derfra kommer du frem til Thrinakia, øen hvor Solen
har sine smældfede får og hornede bøfler på enge.
Syv er bøflernes drifter, og syv er fårenes flokke,
alle som én på halvtreds. De får ikke lam eller kalve,
men blir dog ikke færre...
Lar du dem være i fred, alene betænkt på din hjemfærd,
når I til Ithaka og kommer hjem efter talrige trængsler.
Men gør I kvæget fortræd, da spår jeg undergangsstunder
både for skib og for mænd. Og skulle du selv slippe fra det,
kommer du ilde og silde, med tab af hele dit mandskab.[3]

Det går selvfølgelig lige så galt, som Kirke spår: Odysseus' mænd bliver fanget af vindstille på øen og forgriber sig af sult på okserne, mens Odysseus et øjeblik er blundet hen. Da han vågner er skaden sket:

Men da jeg så kom ned til skibet og stranden ved havet,
gik jeg i rette med hver og én fra en ende. Men skaden
var jo ubodeligt sket og kvierne slagtet og døde.
Folkene fik dog af guderne tegn som varsled os ilde:
Huderne kravled omkring, og bøfferne brøled på spiddet,
både som stegte og rå. Det lød som en muhende kostald.[4]

3. *Odysseen* 12.127-131 og 137-140 i Otto Steen Dues oversættelse.
4. *Odysseen* 12.391-396.

I den hellenistiske Homerforskning herskede der vild uenighed om den rejserute, som Odysseus og hans mænd havde tilbagelagt fra Troja tilbage til Ithaka, og alt fra en fuldstændig afvisning af en sejlrute i vores virkelighed til en minutiøs kortlægning inden for Middelhavets grænse blev fremsat. Selv i dag dukker der populærvidenskabelige teorier op om Odysseus' 'rigtige' rejserute. I tilfældet med Solgudens okser angiver Homer selv Trekantøen, som hurtigt blev identificeret med Sicilien. Den østlige del af øen blev koloniseret af grækere fra omkring 750 f.Kr., og på Archimedes' tid fremviste turistguider de klippeblokke, som Kyklopen havde kastet efter Odysseus' skib i havet ud for vulkanen Ætna.

Den litterære og matematiske spøg, der går under navnet *Okseproblemet,* har sit ene udgangspunkt i Homers *Odyssé* og i episoden, som henlægges netop til Sicilien. Det er i bedste hellenistiske tradition skrevet i såkaldt elegiske disticha, dvs. verselinjer der veksler mellem heksameter og pentameter, og på det homeriske kunstsprog (hvilket den følgende oversættelse ikke forsøger at gengive). Det andet udgangspunkt er en skik blandt oldtidens naturvidenskabsmænd, der går ud på at stille hinanden vanskelige skriftlige opgaver, som opgavestilleren opfordrer andre til at løse. Der findes andre metriske eksempler, men dette er nok det berømteste.[5]

I 1773 fandt den tyske digter G.E. Lessing opgaven i et hidtil upåagtet håndskrift, som han straks udgav. Det indeholder et digt på 44 linjer samt en indledning, som nogen (i antikken eller tidlig middelalder?) har tilføjet. Heraf fremgår det, at forfatteren er Archimedes, og at det er stilet til kolleger i Alexandria i Ægypten og sendt sammen med en afhandling ('brev') til det førende universageni i byen, Eratosthenes fra Kyrene (ca. 285-194 f.Kr.).

Lige siden offentliggørelsen af *Okseproblemet* i 1773 har matematikere diskuteret, om digtets forfatter virkelig er Archimedes. Fra flere antikke kilder ved man, at Archimedes formulerede et berømt okseproblem - det bliver ligefrem brugt som et udtryk for et meget vanskeligt spørgsmål. Det kan ikke afgøres med sikkerhed, hvem forfatteren til dette digt er (det kunne fx være en bearbejdet version af et problem stillet af mesteren selv), men nogen har jo skrevet det. Udgiveren af Achimedes' skrifter, danskeren J.L. Heiberg mente, at det var Archimedes selv,[6] og fremførte bl.a., at hans metode til at udtrykke meget store tal med lethed kunne løse problemet med at udskrive resultatet.

5. Carsten Weber-Nielsen har andetsteds i festskriftet oversat en række af disse versificerede matematiske gåder.
6. *Questiones Archimedeae,* Hauniae 1879 (Heibergs disputats), s. 25-26.

Kritikere har ment, at løsningen af det tredje og sidste punkt i opgaven ikke kunne løses af antikkens matematikere og slutter, at så kunne Archimedes ikke have stillet den. Læseren må selv overveje argumentets lødighed. Opgaven er i hvert fald stillet af nogen, der ser ud til at mene, at han kan løse den selv.

Opgaven har tre trin: Vers 1-31 drejer sig om at finde antallet af hver de fire flokke ud fra syv kompliceret formulerede ligninger. Løsningen af dem viser et astronomisk mindste-antal af (hele) dyr. Kan man klare det, er man ikke helt dum. Vers 31-36 stiller nu en ny betingelse: To af flokkene skal stilles op i en firkant (et kvadrat eller et rektangel - der er to løsninger). Hvor mange må der så mindst være? Vers 37-40 stiller den tredje betingelse: De to resterende flokke skal stilles op i en trekant. Hvor mange må der så mindst være? De sidste vers lover sejrskransen til den der når til et resultat.

Den ledsagende moderne notation er et tydeligt tegn på problemets kompleksivitet.

***

Tekst

Et problem, som Archimedes stillede til forskerne i Alexandria, der arbejder med den slags. Dette sendte han på vers i brevet til Erathosthenes fra Kyrene.

[Vers 1-2] Mængden på Solgudens okser, kære fremmede, skal du beregne ved at udfolde din logiske sans, hvis du er så klog. [3-4] Altså, hvor stor en mængde, der engang gik og græsssede på sletterne på den sicilianske ø Thrinakia; de var delt op i fire flokke og havde [5-6] forskellige farver.

Den ene flok var mælkehvid W og w, den anden var skinnende sort i farven X og x, [7-8] den tredje var gul Y og y, og den fjerde broget Z og z. I hver flok var der et mægtigt antal tyre, [9-10] som var i følgende forhold: du skal vide, fremmede, at de mælkehvide tyre var lig med halvdelen og en tredjedel af de sorte [11-12] og lig med samtlige af de gule. Desuden var de sorte lig med en fjerdel og en femtedel af [13-14] af de brogede og endvidere lig med alle de gule. Du skal betragte de resterende af de brogede [15-16] som lig med en sjettedel og en syvendedel af de hvide tyre og også lig med alle de gule. [17-18] For køerne gjaldt følgende: De hvide var præcist lig med [19-20] en tredjedel og en fjerdel af hele den sorte flok. Men de sorte var til gengæld lig med en fjerdedel [21-22] og en femtedel af de brogede sammen med dem, der gik til græsning med tyrene. [23-24] De brogede køer havde samme antal som en femtedel og en sjettedel af de gules flok. [25-26] De gule blev talt til at være lig med en halv tredjedel og en syvendedel af den hvide flok.

[27-28] Fremmede, hvis du kan angive præcist, hvor mange køer Solguden havde, udover antallet af de velnærede tyre og igen [29-30] udover farvefordelingen af køerne, så ville man ikke kalde dig dum eller uden forstand på tal. [31-32] Du kan dog endnu ikke tælles blandt de kloge. Tag nu og tænk over alle følgende omstændigheder ved Solgudens okser:

[33-34] Da de hvide tyre blandede sig med de sorte, stod de fast i samme antal [35-36] i både dybde og bredde, og de fyldte alle Thrinakias kæmpestore sletter over det hele. [37-38] Og nu blev de gule og de brogede sluttet sammen til én, og de stod der, idet de begyndte fra én og trinvist [39-40] dannede en trekantet form. Der var hverken nogle tyre af andre farver tilstede og heller ingen til overs.

[41-42] Hvis du kan finde ud af det, fremmede, og kan overskue det i hovedet og angive alle antallene på mængderne, [43-44] vil du træde frem som den stolte sejrherre og du vil vide, at du er blevet vurderet som fuldkommen i denne kundskab.

De syv ligninger

$$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y$$

$$X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y$$

$$Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y$$

$$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x)$$

$$x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z)$$

$$z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y)$$

$$y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w)$$

I sagens natur er alle tal positive og hele.

De to betingelser:

$$W+X=p^2$$

$$Y+Z=\tfrac{1}{2}\cdot q\cdot(q+1)$$

Her er p og q hele positive tal.

Kommentar

Efter at have opskrevet de syv ligninger og de to betingelser, er det en simpel, omend omstændelig, sag at løse ligningerne med Y som parameter. Udregnes de indgående summer af brøkerne, får man for kvierne:

$$
\begin{aligned}
w &= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)(X+x)+(\tfrac{4}{12}+\tfrac{3}{12})(X+x)+\tfrac{7}{12}(X+x)+\tfrac{7}{12}X+\tfrac{7}{12}x\\
x &= \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right)(Z+z)+(\tfrac{5}{20}+\tfrac{4}{20})(Z+z)+\tfrac{9}{20}(Z+z)+\tfrac{9}{20}Z+\tfrac{9}{20}z\\
z &= \left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\right)(Y+y)+(\tfrac{6}{30}+\tfrac{5}{30})(Y+y)+\tfrac{11}{30}(Y+y)+\tfrac{11}{30}Y+\tfrac{11}{30}y\\
y &= \left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}\right)(W+w)+(\tfrac{7}{42}+\tfrac{6}{42})(W+w)+\tfrac{13}{42}(W+w)+\tfrac{13}{42}W+\tfrac{13}{42}w
\end{aligned}
$$

Disse fire ligninger kan løses mht w, x, y og z, og man får:

$$
\begin{aligned}
w &= \tfrac{2800}{4943}X-\tfrac{571}{19772}W+\tfrac{185031}{19772}Y+\tfrac{1260}{4943}Z\\
x &= -\tfrac{143}{4943}X-\tfrac{1716}{34601}W+\tfrac{79299}{4943}Y+\tfrac{2160}{4943}Z\\
y &= \tfrac{2600}{14829}X-\tfrac{35659}{118632}W+\tfrac{114543}{39544}Y+\tfrac{390}{4943}Z\\
z &= \tfrac{1694967}{1186320}Y+\tfrac{2860}{44487}X+\tfrac{392249}{35558960}W+\tfrac{143}{4943}Z
\end{aligned}
$$

så tilbage er blot at løse

$$
\begin{aligned}
W &= \tfrac{5}{6}X+Y,\\
X &= \tfrac{9}{20}Z+Y,\\
Z &= \tfrac{13}{42}W+Y
\end{aligned}
$$

og

$$Y = t,$$

og indsætte resultatet i "kvieligningerne". Efter mange skriverier, eller ved brug af et passende program, som fx Maple, får man:

$W = \frac{742}{297} t = \frac{742}{3^3 \cdot 11} t$

$X = \frac{178}{99} t = \frac{178}{3^2 \cdot 11} t$

$Y = t$

$Z = \frac{1580}{891} t = \frac{1580}{3^4 \cdot 11} t$

$w = \frac{2402120}{1383129} t = \frac{2402120}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} t$

$x = \frac{543694}{461043} t = \frac{543694}{3^2 \cdot 11 \cdot 4657} t$

$y = \frac{604357}{461043} t = \frac{604357}{3^2 \cdot 11 \cdot 4657} t$

$z = \frac{106540}{125739} t = \frac{106540}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} t$

I de sidste udtryk er nævneren skrevet som produkt af sine primfaktorer. Da der er tale om hele tal, skifter vi parameteren t ud med mindste fælles multiplum for de syv nævnere gange en ny parameter n:

$$t = 3^4 \cdot 11 \cdot 4657 \cdot n = 4149387n$$

Herved får vi følgende heltallige løsninger til de syv ligninger:

$W = 10366482n$

$X = 7460514n$

$Y = 4149387n$

$Z = 7358060n$

$w = 7206360n$

$x = 4893246n$

$y = 5439213n$

$z = 3515820n$

og for summen:

$W + X + Y + Z + w + x + y + z = 50389082n$ og n er et helt tal

Så den nedre grænse for antallet af Solgudens kvæg er altså 50389082 ($n = 1$), sådan godt og vel 50 mio stykker.

Men vi får også at vide at summen af hvide og sorte tyre skal være et kvadrattal: $W+X=a^2$

På den anden side, så er summen også givet ved

$$W + X = 17826996n = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot n.$$

Kvadratroden af højre side skal være et helt tal

$$\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot n} = \text{et helt tal}$$

så

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot h^2 = 4456749 \cdot h^2 \; .$$

Dette indsættes overalt hvor n optræder:

$W = 46200808287018h^2$

$X = 33249638308986h^2$

$Y = 18492776362863h^2$

$Z = 32793026546940h^2$

$w = 32116937723640h^2$

$x = 21807969217254h^2$

$y = 24241207098537h^2$

$z = 15669127269180h^2$

Som tidligere finder vi summen:

$W + X + Y + Z + w + x + y + z = 224571490814418\ h^2$

med en ny nedre grænse for antallet af kvæg

$$224571490814418 = 2{,}24571490814418 \cdot 10^{14}$$

(Det er et temmeligt stort tal; der er ca $7 \cdot 10^9$ mennesker her på Jorden, så hvis man fordelte kvæget ligeligt mellem os alle ville vi få ca $3 \cdot 10^4$ =30.000 stykker hver)

Tilbage er nu "kun" den anden betingelse, nemlig at summen af Y og Z skal være et trekantstal:

$$Y + Z = \tfrac{1}{2} \cdot q \cdot (q+1)$$

Y og Z er kendte som funktion af h^2, så venstre side = $18492776362863h^2$ + $32793026546940h^2$

= $51285802909803h^2$, som indsættes ovenfor:

$$\tfrac{1}{2} \cdot q \cdot (q+1) = 51285802909803h^2 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4667^2 \cdot h^2$$

$$q \cdot (q+1) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4667^2 \cdot h^2$$

Ved løsningen af denne ligning følger vi Heath[7] og skifter til nye variable v og u ved definitionerne:

$$2q + 1 = v \Leftrightarrow q = \tfrac{v-1}{2} \quad \text{og} \quad 2 \cdot 4657 \cdot h = u \Leftrightarrow h = \tfrac{u}{2 \cdot 4657}$$

7. *The Works of Archimedes* edited by T.L.Heath, DOVER Publications, 2002.

Med dette skift af variable får vi

$$\frac{v-1}{2}\cdot\frac{v+1}{2} = 2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot29\cdot353\cdot46572\cdot h^2 \Leftrightarrow$$
$$v^2 - 1 = 2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot29\cdot353\cdot(2\cdot4657\cdot h)^2 = 2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot29\cdot353\cdot u^2$$

eller

$$v^2 - 1 = 2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot29\cdot353\cdot u \Leftrightarrow$$
$$v^2 - 2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot29\cdot353\cdot u^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$v^2 - 4729494u^2 = 1$$

Denne ligning er en såkaldt Pell'sk ligning, dvs en ligning af typen

$$x^2 - Ny^2 = 1$$

hvor N er et helt tal.

Er N et kvadrattal har ligningen ingen heltallige løsninger. For at indse dette sætter vi N = a^2 (og a positiv), og omskriver ligningen til

$$x^2 - a^2y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+ay)(x-ay) = 1$$

$x = ay$ er ikke en løsning, da der i så fald står 0 på venstre side og 1 på højre. Altså er $x \neq ay$. Der findes derfor et helt tal b, så

$$x = ay + b, b \geq 1$$

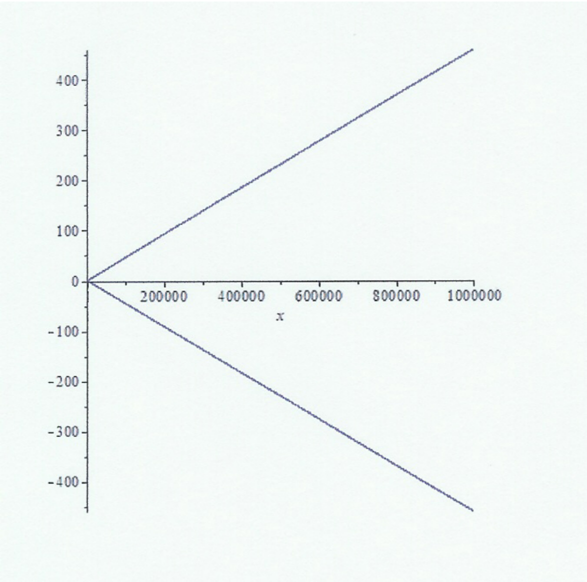
og ligningen kan nu skrives

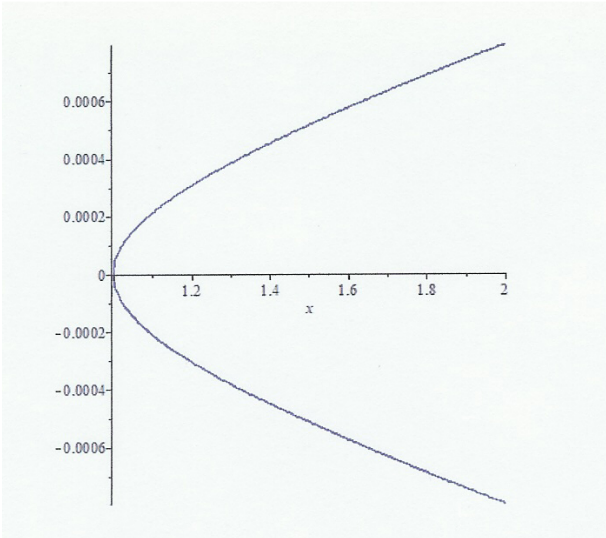
$$x^2 - a^2y^2 = 1 \Leftrightarrow (2ay+b)b = 1$$

Den første faktor på venstre side er >2 og den anden er > eller = 1, hvorved produktet er >2 . Ligningen har derfor ingen løsning i tilfældet hvor N er et kvadrattal.

Er N derimod ikke et kvadrattal har ligningen en heltallig løsning (faktisk uendelig mange), altså to hele tal x og y som indsat i ligningen gør venstre side lig med højre side. At det ikke er oplagt kan ses hvis man tegner grafen for punktmængden $x^2 - Ny^2 = 1$, som er en hyperbel med de halve storakser 1 og $\frac{1}{\sqrt{N}}$, hvilket ses af omskrivningen $x^2 - \frac{1}{\frac{1}{N}}y^2 = \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{N^2}}}y^2 = 1$.

Nedenfor er grafen tegnet i det tilfælde som har vores interesse, altså for N = 4729494, dvs grafen for hyperblen $x^2 - 4729494y^2 = 1$, inde omkring (0, 0) og i et mere interessant område:





Det er ikke oplagt indlysende, at grafen går gennem et eller flere punkter, hvis koordinater er hele tal, men det ikke desto mindre tilfældet, og endda gennem uendelig mange.

At vide at der er en løsning, er imidlertid ikke det samme som at kende den. Det er ikke simpelt at løse denne ligning, så for at illustrere den almindelige fremgangsmåde tager vi et eksempel, nemlig ligningen

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

Vi skal bruge den såkaldte kædebrøksudvikling[8] for $\sqrt{5}$ som findes ved simpel division:

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$$

Der fortsættes nu med nævneren i brøken:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-4} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2$$

så $\sqrt{5}$ kan skrives som

8. Der er en uhyre omfattende litteratur om kædebrøker. Her er et par stykker som er begge er glimrende:
Schmidt, Asmus: *Kædebrøker*, Gyldendal, Københabn, 1967
Davenport, H: *The Higher Arithmetic, An Introduction to the Theory of Numbers*, Eighth Edition, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-72236-0

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

og gør nu præcis det samme som før og omskriver nævneren:

$$\sqrt{5} + 2 = 4 + \left(\sqrt{5}+2\right) - 4 = 4 + \left(\sqrt{5}-2\right) = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$$

så nu kan vi skrive kvadratroden som

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

Men nu er vi tilbage hvor vi var før (hvilket følger af at $(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2) = 1$) , så de to tal er hinandens reciprokke:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5} - 2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2$$

I alt har vi for $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\dots}}}}} = q + \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+\frac{1}{q_4+\frac{1}{q_5+\dots}}}}}$$

hvor den sidste skrivemåde er en generalisering. Det er meget pladskrævende at skrive, så man bruger også disse

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\dots \text{ eller } \sqrt{N} = q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\dots$$

Med en kortere skrivemåde

$$\sqrt{5} = [2,4,4,4,\dots] = [2,\overline{4}]$$

hvor $\overline{4}$ i overensstemmelse med vanlig praksis betyder at 4 fortsætter i det uendelige. Man kalder brøkerne

$$\frac{A_0}{B_0} = q_0, \frac{A_1}{B_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}, \frac{A_2}{B_2} = q_0 + \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2}}, \frac{A_3}{B_3} = q_0 + \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}}$$

for konvergenter, som for voksende n vil de tilnærme $\sqrt{N}$ bedre og bedre.

Dette kaldes en (uendelig) kædebrøksfremstilling, og det er sædvane at numerere de enkelte cifre i fremstillingen, begyndende med 0. Betegnes ciffernummeret med n, har vi altså:

n	0	1	2	3	4	5	...
$\sqrt{5}$	2	4	4	4	4	4	...

Man kan vise at kædebrøksfremstillingen for kvadratrødder i almindelighed er periodisk, og på formen

$$\sqrt{N} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, 2q_o}]$$

med en periode som slutter med det dobbelte af kædebrøkens begyndelsesciffer. De øvrige danner en symmetrisk "følge" som kan indeholde et lige eller ulige antal cifre og med nummeringen

n	0	1	2	3	...	n	$n+1$	$n+2$	...
$\sqrt{N}$	q_0	q_1	q_1	q_1	...	q_n	$2q_0$	q_1	...

For den sidste brøk blandt konvergenterne inden leddet med $2q_0$, altså

$$\frac{A_n}{B_n} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 \ldots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n +}}}}}$$

gælder:

(*) $A_n^2 - N \cdot B_n^2 = (-1)^{n-1}$

så $x = A_n$ og $y = B_n$ er derfor en løsning til $x^2 - N \cdot y^2 = 1$ såfremt n er ulige. Er n et lige tal vil $2n + 1$ være ulige og derfor vil så $x = A_{2n+1}$ og $y = B_{2n+1}$ være en løsning.

Igen giver det nok et bedre overblik med et eksempel, så vi fortsætter med $x^2 - 5y^2 = 1$. Da vi har fundet kædebrøksudviklingen

n	0	1	2	3	
$\sqrt{5}$	2	4	4	4	...
$\sqrt{N}$	q_0	q_1	$2q_0$	q_1	

er det blot at udregne konvergenterne:

$$\frac{A_0}{B_0} = 2, \frac{A_1}{B_1} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}, \frac{A_2}{B_2} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}} = \frac{38}{17}, \frac{A_3}{B_3} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} = \frac{161}{72}, \ldots$$

I eksemplet er n = 1, altså ulige, og vi skal derfor have fat i $\frac{A_1}{B_1} = \frac{9}{4}$, så en løsning (den mindste) til x^2 - 5y^2 = 1 er x = 9 og y = 4. Af (*) fremgår at også 2n + 1 = 3 er en løsning, dvs x = 161 og y = 72 også er løsning til x^2 - 5y^2.

Endnu et eksempel til illustration:

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

Denne gang skal vi altså finde kædebrøksfremstillingen for $\sqrt{13}$ (nedenfor understreges cifrene i kædebrøken efterhånden som de bliver fundet):

$$\sqrt{13} = 3 + \sqrt{13} - 3 = \underline{3} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{13}-3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{\left(\sqrt{13}+3\cdot\left(\sqrt{13}-3\right)\right)} = \frac{\sqrt{13}+3}{13-9} = \frac{\sqrt{13}-3}{4} = 1 + \frac{\sqrt{13}-1}{4} = \underline{1} + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{13}-1}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)}{13-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} = \frac{\sqrt{13}-3}{4} = \underline{1} + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{13}-2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)}{13-4} = 1 + \frac{\sqrt{13}-3}{3} = \underline{1} + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{13}-2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)}{13-1} = 1 + \frac{\sqrt{13}-3}{4} = \underline{1} + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{13}-3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{13}-3} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{13}+3\right)}{13-9} = \sqrt{13} + 3 = \underline{6} + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{13}-3}}$$

Nu er vi tilbage ved begyndelsen, og vi har derfor

$$\sqrt{13} = [3,1,1,1,1,6,1,1\ldots] = \left[3,\overline{1,1,1,1,6}\right]$$

og hvis vi numererer

n	0	1	2	3	4	5	6	7	
$\sqrt{13}$	3	1	1	1	1	6	1	1	…
$\sqrt{N}$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	$2q_0$	q_1	q_2	

n = 4 er således et lige tal, og vi skal derfor have fat i den 2 · 4+1=9[9] konvergent for at finde den mindste løsning til $x^2 - 13y^2 = 1$, hvilket kræver en del regneri. Igen er et program som fx Maple en stor hjælp. Man finder

$$\frac{A_9}{B_9} = \frac{649}{180}$$

og den mindste løsning til x^2 - 13y^2 = 1 er x = 649 og y = 180.

Således beredte kan vi nu vende os til vores Pell'ske ligning

$$v^2 = 4729494u^2 = 1$$

hvor den mindste heltallige løsning er

v = 109931986732829734979866232821433543901088049 =

1.09931986732829734979866232821433543901088049$\cdot 10^{44}$

og

u = 50549485234315033074477819735540408986340 =

5.0549485234315033074477819735540408986340$\cdot 10^{40}$

Men de kan ikke bruges da $2 \cdot 4657 \cdot h = u \Leftrightarrow h = \frac{1}{2 \cdot 4657}$ betyder at både 2 og 4657 er divisorer i u. Vi vil derfor følge Heath og notere at den mindste løsning har 205000 cifre og tallet er fuldstændigt uoverskueligt, men ovenstående har forhåbentligt vist hvordan man kan løse en ligning af den art.

Man kan selv vha et program finde den mindste løsning til ”Okseproblemet”, idet ovenstående viser hvorledes Pell’ske ligninger kan løses.

2 Andres fremstillinger af Archimedes' fysiske og mekaniske opdagelser

Den romerske arkitekt Vitruvius, som levede i århundredet f.Kr., har i ti bogruller De architectura *givet en oversigt over den græsk-romerske arkitekturs og tekniks historie. I niende bog beskriver han, hvorledes Archimedes fandt ud af massefylden (Kong Hierons guldkrans) og i tiende, hvorledes han gav anvisning på konstruktionen af en maskine til at hæve vand med: skruen uden ende.*

2.1 Kong Hierons guldkrans

I forordet til niende bog fortæller han den berømte historie om Archimedes og kong Hierons guldkrans.

9. Archimedes opfandt mange forskellige og vidunderlige ting, men den, jeg nu skal fortælle om, giver indtryk af at være opstået på grund af en enestående genialitet.

Kong Hieron af Syrakus var meget stolt over sin kongemagt, og da han havde haft held med sine forehavender, besluttede han at skænke en guldkrans som offergave til de udødelige guder i et eller andet tempel. Han bestilte kransen for en bestemt pris, vejede guldet af på en fintmærkende vægt og udleverede det til mellemmanden, der havde fået ordren. Denne afleverede det meget omhyggelige håndarbejde til kongen til tiden, og tilsyneladende havde han ramt kransens vægt helt præcist. 10. Efter at der var gået rygter om, at han havde taget noget guld og erstattet det med en tilsvarende mængde sølv, blev Hieron rasende over at være blevet holdt for nar, og da han ikke kunne finde nogen metode til at afsløre tyveriet, bad han Archimedes om at se på sagen. Mens Archimedes tumlede med dette problem, kom han tilfældigt til badeanstalten, og da han dér satte sig i badekarret, lagde han mærke til, at der løb vand ud ganske svarende til så stor en del af kroppen, han sænkede ned i badekarret. Da dette havde vist ham metoden til løsningen af hans problem, tøvede han ikke, men sprang af lutter glæde op af badekarret, og mens han splitternøgen skyndte sig hjem, gav han højlydt til kende, at han havde fundet, hvad han søgte. For mens han løb, råbte han igen og igen på græsk *εὕρηκα, εὕρηκα*.[9]

9. *Heureka, heureka* 'Jeg har fundet det, jeg har fundet det!'

11. Efter denne indledende opdagelse fortæller man, at han lavede to klumper med samme vægt som kransen, en af guld og en anden af sølv. Da han havde gjort det, fyldte han en meget stor krukke med vand helt til kanten og sænkede så sølvklumpen ned i den. Der løb lige så meget vand ud af krukken, som størrelsen af klumpen, der var sænket ned. Så tog han klumpen op, og det der manglede fyldte han på idet han målte det til en *sextarius,*[10] så vandet igen gik til kanten. På den måde fandt han, hvad sølvets vægt svarede til i forhold til en bestemt vandmængde.

12. Da han havde fundet ud af det, sænkede han på samme måde guldklumpen ned i en fuld krukke, og da han havde taget den op igen og målt vandet på samme måde, fandt han, at der ikke manglede den samme mængde vand men mindre: lige så meget som guldklumpen var mindre i omfang end sølvklumpen med samme vægt. Så fyldte han igen krukken, og da han på samme måde havde sænket kransen ned i vandet, fandt han ud af, at der løb mere vand ud ved kransen end ved guldklumpen med samme vægt. Ved at beregne det vand, der manglede mere ved kronen end ved klumpen afslørede han sølvlegeringen, og mellemmandens tyveri var afsløret.

10. *Sextarius* er et romersk rummål svarende til 0,546 l.

2.2 Archimedes' skrue

Opfindelsen af skruen uden ende er blevet tillagt Archimedes, men i sin beskrivelse nævner Vitruvius ikke faderskabet til opfindelsen (men det gør Diodorus Siculus i Bibliotheke 1.32.1-2[11] og 5.37.3-4). *Selve beskrivelsen af skruen findes hos Vitruvius i X.6:*

[træstammens konstruktion]

1. Men der er også en metode med en snegleform,[12] som løfter en stor mængde vand op, men ikke så højt som et hjul gør. Den konstrueres på følgende måde: Man tager en træstamme, som er lige så mange fod lang som den er fingre tyk. Den gøres fuldstændig rund. I enderne deles cirklens omkreds i otte dele med en passer ud fra fjerdedele og ottendedele, og de linjer anbringes sådan, at når træstammen ligger fuldstændig vandret, skal linjerne ved begge ender være i vatter og vandret passe nøjagtigt til hinanden og for hver ottendedel i omkredsen indhugges der linjer i træstammens længderetning. På samme måde skal der, når træstammen ligger helt vandret, udskæres fuldstændig parallelle linjer lodret med mellemrum der svarer til en ottendedel af endernes omkreds. Således vil der være lige store intervaller både i stammens omkreds og i dens længderetning. På den måde vil de linjer, som løber i længderetningen, krydsvis skære omkredslinjerne og krydspunkterne mærkes af.

2. Når disse linjer er blevet markeret korrekt, tager man en tynd lineal skåret af piletræ eller kyskhedstræ.[13] Den indsmøres i flydende beg[14] og fæstnes i det første skæringspunkt. Så føres den skråt hen til det næste skæringspunkt for længdelinjerne og omkredslinjerne og efterhånden som det går frem og passerer hvert af punkterne i den rigtige rækkefølge og tromlen drejes rundt, fastgøres den ved hvert indsnit, og således ved at trække den fra det første til det ottende punkt når den til og fæstnes på den linje, hvorpå dens første del

11. Diodorus Siculus 1.32.1-2 om Ægypten:
Deltaet ligner i form på det nærmeste Sicilien; det har sider på hver 750 stadier og en grundlinje, der beskylles af havet, på 1.300 stadier. Selve øen er gennemskåret af mange kunstige kanaler og omfatter det smukkeste landområde i Ægypten. Det er nemlig dannet af floden og er rigt på vand og bærer derfor mange forskellige afgrøder, fordi floden hvert eneste år aflejrer dynd, og menneskene let overrisler landet med et apparat, som Archimedes fra Syrakus opfandt, og som efter sin form kaldes en snegl.

Og samme skriver i 5.37.3-4 om minedrift i Spanien:
Sommetider støder de nede i dybet også på floder, der strømmer under jorden, og de overvinder deres voldsomme strøm ved at afskære deres tilstrømninger, når de styrter ned i de skrå minegange. Fordi de bliver drevet frem af en usvigelig sikker forventning om profit, fører de deres tilløb tilbage til udgangspunktet, og hvad der er det mest utrolige: De bortleder vandstrømmene med de såkaldte ægyptiske snegle, som Archimedes fra Syrakus opfandt, da han kom til Ægypten.

12. I kapitlerne forinden har Vitruv gennemgået andre hævemaskiner til vand, tympanum og hydraletes.

13. Træsorter, hvis grene er meget bøjelige og som derfor kan bruge som bøjelige og smidige linealer.

14. Beg blev brugt som klæbemiddel i oldtiden.

var blevet fæstnet. På den måde kommer den lige så langt frem skråt henimod det ottende punkt som den kommer frem i længderetningen. På samme måde danner linealerne for de otte dele af diameteren, som er fæstnet skråt i skæringspunkterne på hele længde- og omkredsfladen, spiralkanaler, som ser fuldstændigt ud som et sneglehus.

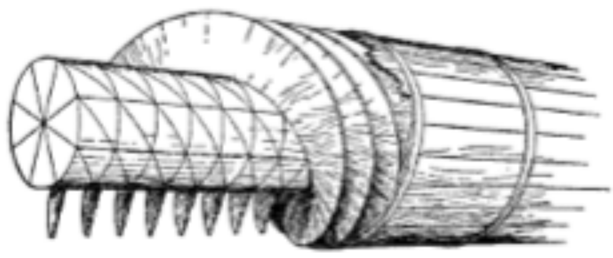
[Konstruktionen af tromlen uden om skruen]

3. Således fæstnes efter dette mønster den ene lineal over den anden, alle indsmurt i flydende beg, og de bygges op indtil hele diameteren er lig med en ottendedel af længden. Disse dækkes og omgives af staver, fæstnet for at beskytte spiralen. Så gennemvædes disse staver med beg og bindes sammen med jernremme, så de ikke kan adskilles af vand-presset. Skaftets ender dækkes med jern. Til højre og venstre for skruen er bjælker, med tværbjælker der fæstner dem sammen i begge ender. I disse tværbjælker bliver hullerne foret med jern, og der bliver anbragt tappe, og således kan skruen drejes rundt ved at mænd træder dem rundt som i en trædemølle.

[Skruens opstilling]

4. Den skal sættes op med en hældning, som svarer til, når man tegner Pythagoras' retvinklede trekant, dvs. lad dets længde blive delt ind i fem dele, og hæv skruens top op til 3/5 af længden og således vil afstanden fra bunden i den lodrette linje til spidsen af skruen være lig med 4/5 dele. Hvordan dette skal gøres vises i et diagram bagest i bogen.[15]

Nu har jeg så klart jeg har kunnet, beskrevet principperne for, af hvad materiale konstruktioner til at hæve vand bliver lavet, hvordan de bliver konstrueret, hvordan de sættes i bevægelse, hvordan de kan blive anvendelige til utallige formål i det det håb, at de vil blive bedre kendt.



Illustrationen er hentet fra http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Screw/SourcesScrew.html

15. Diagrammet er gået tabt.

2.3 Archimedes som våbeningeniør

Plutarch: ***Marcellus-biografien*** **14.7-17.7**

Plutarch skrev omkring 100 e.Kr. en række mere eller mindre historisk velfunderede biografier om store græske og romerske statsmænd. Biografierne sammenligner en græker og en romer, i dette tilfælde den thebanske general Pelopidas fra 300-tallet f.Kr. og den romerske imperator Marcus Claudius Marcellus, som i 213-212 f.Kr. belejrede og indtog Syrakus.

[14.7] Archimedes, der var en slægtning af kong Hieron og hans gode ven, skrev, at det er muligt med en given kraft at bevæge en given vægt. Efter hvad man siger, tilføjede han i ungdommeligt overmod, at hvis han havde en anden jordklode, kunne han godt flytte denne her, hvis han gik over på den anden. [8] Det forbløffede Hieron, som bad ham om at føre denne opgave ud i livet og påvise, at en meget stor ting kunne bevæges af en lille kraft. Så tog Archimedes et tremastet handelsskib blandt kongens skibe, som var trukket på land under store anstrenglser og med en talstærk styrke. Han bemandede det med en masse folk og lastede det med den sædvanlige last. Siddende et stykke derfra kunne han uden besvær men med bare én hånd skubbe til enden af en *polyspastos*[16] og let og elegant trække skibet af sted, som om det løb hen over vandet. [9] Kongen var målløs, og ved tanken om denne tekniks muligheder overtalte han Archimedes til at konstruere nogle maskiner til ham, som både kunne tjene til forsvar og angreb under enhver form for belejring. Archimedes havde ikke tidligere selv beskæftiget sig med den slags, fordi han havde levet det meste af sit liv i en tid præget af fred og festivitas, men nu skulle hans udstyr vise sig at være til stor nytte for syrakusanerne og med det også dets opfinder.

[15.1] Da romerne angreb både til lands og til vands, blev syrakusanerne lammet af en tavshed, som skyldtes deres frygt; de troede ikke, de kunne stille noget op mod en så stor magt og styrke. Men Archimedes satte sine maskiner i sving, og fodfolket blev mødt af alle former for kasteskyts og sten af overstørrelse, der blev fremført med en utrolig larm og hastighed. Intet kunne modstå deres vægt, og de fik dem, de ramte, til at tage flugten, og bragte uorden i geledderne. [2] Fra murene blev der pludselig kastet lægder ud mod skibene, som sendte nogle af dem til bunds, fordi lægderne med deres tilknyttede belastning trykkede skibene ned ovenfra; andre skibe blev trukket op ved forstavnen med jern-

16. 'Mange-trækker', dvs. en talje med mange udvekslinger. I andre versioner af denne historie nævnes en *trispatos*, dvs. en talje med tre udvekslinger. Taljen er desværre ikke beskrevet i enkeltheder.

grabber eller tranelignende næb og sendt ret ned med deres agterstavn – eller de blev vendt rundt med tove inde fra byen og smadret mod klipperne, der fra naturens hånd er neden for byen, samtidig med at søfolkene led under store tab. [3] Ofte blev et skib trukket højt op i luften fra havet og snurret rundt, og det hang der i luften som et frygtindgydende syn, indtil mandskabet var kastet overbord i alle retninger, og skibet faldt tomt ned på muren eller gik løs af den grabbe, der holdt den. Marcellus bragte en maskine, som kaldtes en *sambyke*[17] pga. dens lighed med dette instrument, op på skibsbroen. [4] Mens maskinen stadig var et stykke fra muren, blev en sten på 50 talenter[18] slynget mod den og dernæst en anden og en tredje. Stenene ramte maskinen med et stort brag og rabalder og ødelagde dens fodstykke; stellet blev splintret og revet af skibsbroen, hvorefter Marcellus i forvirring beordrede sine skibe at sejle væk hurtigst muligt og sine landstyrker at trække sig tilbage. [5] Derefter holdt romerne råd og besluttede at gå frem mod murene i dække af natten, hvis de altså kunne. For de mente, at det tovværk, som Archimedes havde benyttet sig af, havde en sådan kraft, at det ville sende kasteskytset hen over hovedet på dem – og desuden være komplet ubrugeligt på tæt hold, hvor der ikke var plads til affyring.

Men Archimedes – sådan så det under alle omstændigheder ud – havde for længst forberedt maskiner til modtræk, der kunne tilpasses enhver rækkevidde samt kortrækkende spyd og pile. Og gennem små, fortløbende sprækker i muren blev der opsat maskiner med kort rækkevidde kaldet *skorpioner*, som kunne bombardere fjenden uset. [16.1] Da så romerne troede, de var skjult og gik mod muren, blev de endnu engang overdynget med meget kasteskyts: øverst fra muren blev kampesten rullet næsten vertikalt mod dem, og folk på muren affyrede pile i alle retninger. De trak sig derpå tilbage igen. [2] Men selv da de var opstillet på afstand, fløj pile og spyd afsted og ramte dem, mens de var på vej væk, hvilket skabte et stort blodbad. En stor del af skibene kolliderede og var ikke i stand til at gøre modstand mod fjenderne. De fleste af Archimedes' krigsmaskiner var nemlig bygget tæt bag muren, og det virkede, som om romerne kæmpede mod guderne, idet utallige ulykker regnede over dem fra en usynlig fjende. [17.1] Men det lykkedes Marcellus at flygte, og han skældte sine ingeniører og maskinbyggere ud. "Lad os stoppe", sagde han, "med at kæmpe mod denne matematiske *Briareos*,[19] der bruger vores skibe som øser i havet og har pisket og drevet vores *sambyke* tilbage i

17. Et harpelignende, trekantet musikinstrument med fire strenge.
18. 1 talent = 26 kilogram.
19. En 100-armet, 50-hovedet gigant, der var gud for havstorme.

skam. Selv de hundredearmede væsner fra mytologien overgår han med al det kasteskyts, han sender mod os på samme tid."

I virkeligheden var alle de resterende syrakusanere blot et remedie i Archimedes' udstyr, og dette ene intellekt dirigerede og styrede det hele. [2] For alle andre våben lå ubrugte, og det var kun hans, som byen anvendte både i dens værn og sikkerhed.

[3] Til sidst så Marcellus, at romerne var skrækslagne: hvis de så en tovende eller en stump træ rage ud over muren, råbte de: 'Se dér! Archimedes sender en af sine maskiner mod os!' – og de vendte om og flygtede. Marcellus aflyste hele angrebet og satte derefter sin lid til en længerevarende belejring.

Archimedes havde et så strålende intellekt, så stor en sjælelig kapacitet og så stor en rigdom af videnskabelig indsigt, at selvom han gennem sine opfindelser havde vundet sig et navn og et ry for at have en ikke menneskelig men guddommelig indsigt, ønskede han ikke at efterlade sig noget værk om disse ting. [4] Han regnede nemlig de mekaniske sager og al anvendt videnskab for ufin og håndværksagtig og havde kun ambitioner om emner, hvis geniale løsning ikke har noget at gøre med den barske nødvendighed. [5] Det er nemlig ikke muligt at finde vanskeligere og mere betydelige spørgsmål i geometrien behandlet på en mere simpel og ren form. Nogle tillægger det hans naturlige begavelse, mens andre mener, at det skyldtes hans utrættelige arbejde, at hvad end han gjorde, fremstod det nemt og let. Hvis nogen leder efter et bevis og ikke kan finde det af sig selv, men lærer det af Archimedes, får man samtidig det indtryk, at man kunne have fundet det selv. Så let og hurtigt leder han én på vej til det, der skulle bevises. [6] Derfor er der ingen grund til at tvivle på historierne om ham; bl.a. hvordan han konstant var tryllebundet af en privat, iboende sirene[20] og derfor glemte at spise og tage sig af sin personlige hygiejne. Og hvordan han under tvang blev trukket til badene, hvor han i asken fra ildstederne plejede at tegne geometriske figurer og med sin finger føre linjer i den olie, han var smurt ind i. Altid var han fastholdt af en stor glæde og i sandhed inspireret af muserne.

[7] Selvom han gjorde mange store opdagelser, siges det, at han bad sine venner og slægtninge om at, når han var død, skulle de på hans grav sætte en kugle omgivet af en cylinder og en indskrift, der viser, i hvilket forhold det omsluttende legeme overstiger det indeholdte.

20. Billedet er hentet fra *Odysseen* 12.154-200, hvor Odysseus lytter til sirenernes sang.

3 Archimedes som den ideelle videnskabsmand

Cicero

Marcus Tullius Cicero (106-43 f.Kr.) var en berømt romersk politiker, advokat og forfatter. Han blev født i Arpinum, en lille by sydøst for Rom. I begyndelsen af sin embedskarriere, som toppede med konsulatet i 63 f.Kr., var han kvæstor[21] på det vestlige Sicilien i år 75 f.Kr. og gæstede i denne periode byen Syrakus. Cicero skriver to længere afsnit om Archimedes. Det første lægger han i munden på Philus, der i *Om staten* I, 21-22 og 28 fortæller en historie om en himmelglobus, som efter sigende skulle være lavet af Archimedes. Den anden historie er selvoplevet: I *Tusculanae Disputationes* V,64-66 fortæller den meget græskinteresserede Cicero om sit fund af Archimedes' grav.

3.1 Archimedes' globus

[21] Philus: Jeg vil ikke fortælle jer noget nyt eller noget jeg har udtænkt eller opfundet. Jeg husker nemlig, at Gajus Sulpicius Gallus, et af de klogeste mennesker – som I ved – dengang man talte om dette fænomen [to sole], og han tilfældigvis var hjemme hos Marcus Marcellus, som havde været hans medkonsul, krævede, at man tog den himmelglobus frem, som Marcus Marcellus' bedstefader havde taget med sig tilbage fra plyndringen af det fantastisk rige og kunstudsmykkede Syrakus – det eneste han tog med sig hjem af det rige bytte. Jeg havde tit og ofte hørt denne himmelglobus omtalt på grund af Archimedes' berømmelse, og blev derfor ikke så imponeret af dets udseende. Den almindeligt kendte, som selvsamme Marcellus havde opstillet i templet for Virtus og som Archimedes også havde produceret, var langt smukkere og mere charmerende. [22] Men, da Gallus nu begyndte yderst kyndigt at forklare meningen med dette værk, måtte jeg sige at denne sicilianer havde haft mere forstand end, hvad der synes menneskeligt muligt. Gallus forklarede, at den anden himmelglobus, som var solid og massiv, var en gammel opfindelse, og at den først var blevet drejet af Thales fra Milet, men senere var den samme blevet forsynet med de stjerner og stjernetegn, der sad på himlen, af Eudoxos, efter sigende en elev af Platon. Mange år senere havde Aratos så forklaret Eudoxos' globus og dens udsmykning og figurer i vers, ikke ud fra en astronomisk viden men ud fra en digterisk kunnen. Den type af himmelglobus som viser solens, månens og de fem såkaldt flakkende og omvandrende stjerners bevægelse havde det ikke været muligt at tegne på den massive globus. Og Archimedes' opfindelse er beundringsværdig ved, at han udtænkte, på

21. *Kvæstor:* finansembedsmand.

hvilken måde én omdrejning viste forskelligartede og varierende bevægelser i hver sin omdrejning. Da Gallus satte denne globus i gang, skete der det, at månen på denne bronzemodel fulgte solen med lige så mange omdrejninger, som med dage på selve himlen. Derved fremkom den samme solformørkelse på globussen, og månen faldt ind i den skygge, der er jordens skygge, når solen stod i den modsatte ende…

[28] Hvem kan nu virkelig mene, at Dionysios, da han gjorde alt for at stjæle friheden fra sine borgere, havde udrettet mere end hans landsmand Archimedes, da han efter almindelig opfattelse uden at fortravle sig frembragte den lige omtalte himmelglobus?

3.2 Archimedes' grav

Jeg vil nu trække en mand med sit tegnebræt og tegnestok frem fra glemslens støv. En beskeden mand, som levede mange år efter tyrannen Dionysios i byen Syrakus, nemlig Archimedes.

Jeg opsporede hans grav, mens jeg var kvæstor på Sicilien. Indbyggerne i Syrakus anede intet om denne grav. Ja, de hævdede faktisk, at den slet ikke eksisterede. Den var da også fuldstændig tilgroet og skjult af et tæt tjørnekrat. Men jeg fandt den, fordi jeg kunne huske nogle verslinjer, som jeg havde hørt var indhugget på hans gravmæle, og som nævnte, at der på toppen af mindesmærket var anbragt en kugle og en cylinder.

Da jeg derfor stod og kiggede ud over de mange forskellige gravmæler ved Agrigentoporten, fik jeg øje på en lille søjle, der ragede lidt op over tjørnebuskene. På den var der faktisk en kugle og en cylinder. Jeg sagde straks til de fornemme syrakusanere, som var med mig derude, at jeg mente, jeg havde fundet netop det, jeg ledte efter. Mange folk med krumknive blev så sat i gang med at fjerne krattet og gøre stedet tilgængeligt. Da området var ryddet, og der var skaffet adgang til mindesmærket, gik vi hen til søjlebasens forside. Der så vi tydeligt et indhugget epigram,[22] hvor den sidste halvdel af versene dog var udvisket af vind og vejr.

Således gik det til, at borgerne i den flotteste og engang også lærdeste græske by ville have svævet i uvidenhed om deres kløgtigste bysbarns mindesmærke, hvis ikke en mand fra Arpinum havde gjort dem klogere.

22. *Epigram:* kort digt, ofte indskrift på gravmæle.

Note om udsmykningen på Archimedes' grav

Archimedes viser i *Om kuglen og cylinderen* Bog 1 sætning 34, at en kugles rumfang er fire gange en kegles rumfang, når keglen har grundfladeradius og højde lig kuglens radius, og i en følgesætning (korollar) viser han at forholdet mellem cylinderen og kuglens rumfang og overfladeareal er 3:2, når cylinderens grundfladeradius er lig kuglens radius og cylinderens højde er lig kuglens diameter. Sætningen viser således forholdene mellem de tre legemers rumfang. Forholdet mellem cylinderen og keglens rumfang var dog allerede kendt, vi kender det fra Euklids 12. bog sætning 10, og i *Metoden,* der indeholder et alternativt bevis for forholdene mellem de tre legemer, tilskriver Archimedes Eudoxos beviset for dette. Det er altså forholdet mellem cylinderen og kuglen der er det nye hos Archimedes, og det han vil huskes for.

Cicero fremviser Archimedes' grav. Maleri af Benjamin West 1797, amerikansk-engelsk maler (1738 - 1820). Maleriet viser samtidens interesse for antikken (Privateje).

3.3 Valerius Maximus

Forstyr ikke!

Udtrykket 'Forstyr ikke mine cirkler!' tilskrives almindeligvis Archimedes, og gerne på latin!, selvom Archimedes næppe talte dette sprog, og ingen antik tekst lader ham sige sådan. Det nærmeste man kommer, er en reference til matematikerens møde med den romerske soldat, som retorikeren Valerius Maximus (1. årh. e.Kr.) lidt svulstigt genfortæller således:

Mens Archimedes sad og tegnede figurer med hele sin opmærksomhed rettet mod jorden, kom en soldat, der var trængt ind i huset for at plyndre, anstigende med draget sværd over hovedet. Soldaten spurgte, hvem han var, men på grund af sin overdrevne iver efter at forske kunne Archimedes ikke angive sit navn, som soldaten krævede. Han dækkede i stedet støvet med hænderne og sagde: 'Jeg beder dig, lad være med at ødelægge det!' - og derefter blev han dræbt, fordi han negligerede sejrherrens ordre, og vædede nu linjerne i sin tegning med sit eget blod.[23]

3.4 Quintilian

Geometri er nyttig for unge mennesker

I sit værk om *Talerens opdragelse* bruger Quintilian (1. årh. e.Kr.) Archimedes som eksempel:

Når det kommer til geometri anerkender vi, at dele af den er nyttig for unge mennesker: den træner nemlig deres hjerner, skærper deres intelligens og gør dem hurtigt opfattende. Men fordelene kommer ikke – som ved de andre kunster – når man har fattet det, men i indlæringsfasen. Dette er den gængse opfattelse. Det er ikke uden god grund, at store mænd har brugt megen tid på denne videnskab.[24]

Som eksempel på sådan en stor mand nævner Quintilian bl.a. Archimedes:

Lad os ikke her komme ind på det der er nyttigt i krig, og lad os forbigå, at Archimedes ene mand forlængede belejringen af Syrakus. Det følgende er eminent til at illustrere det, vi forsøger at bevise: flere spørgsmål, der er svære at besvare på anden vis, løses ofte ved de 'lineære beviser' om division, om opdeling i det uendelige, samt om vaksthastighed. Så

23. Valerius Maximus 8.7.ext.7.
24. *Inst. Or.* I.10.34-35

hvis en taler, som jeg skal vise i næste bog, skal tale om alt, kan han på ingen måde være en taler uden viden om geometri.[25]

25. Det Quintilian muligvis sigter til, er matematik som helhed og ikke kun geometri. Det foregående har karakter af en beskrivelse af matematik frem for geometri.